



Institut für Akustik und Elektronische Musik  
Universität für Musik und darstellende Kunst  
Inffeldgasse 10/3  
A-8010 Graz

# Schallquellenpositionierung mit Hilfe des Zeitumkehrspiegels

Diplomarbeit

von

**Imre Csonka**

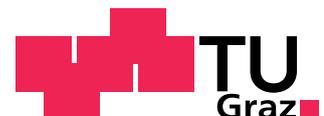
Begutachter: Robert HÖLDRICH , o.Univ.-Prof. Mag. DI Dr.

Betreuer: Alois SONTACCHI , Univ. Ass. DI Dr.

1. März 2006



UNIVERSITÄT  
FÜR MUSIK UND  
DARSTELLENDEN KUNST  
GRAZ - AUSTRIA



An dieser Stelle möchte ich all jenen danken, die durch ihre fachliche und persönliche Unterstützung zum Gelingen dieser Diplomarbeit beigetragen haben.

Weiters bedanke ich mich bei Herrn Univ. Ass. DI Dr. Alois Sontacchi und Herrn o.Univ.-Prof. Mag. DI Dr. Robert Höldrich für die Betreuung meiner Diplomarbeit und den zahlreichen wissenschaftlichen Ratschläge, welche stets zur Verbesserung der Arbeit beigetragen haben.

Besonderer Dank gebührt jedoch meinen Eltern, die mir dieses Studium durch ihre Unterstützung ermöglicht haben.

Imre Csonka  
Graz, Februar 2006

# Zusammenfassung

Das Prinzip des Zeitumkehrspiegels ist eine in der Medizintechnik erprobte Methode um Schallenergie an speziellen Positionen innerhalb eines beliebigen Volumens zu fokussieren. Da in der Wellengleichung die Zeit als Ableitung zweiter Ordnung vorhanden ist, stellen sowohl der Schalldruck  $p(r,t)$  als auch  $p(r,-t)$  eine Lösung dar, was kennzeichnend für die Invarianz unter Zeitumkehr ist.

Innerhalb dieser Diplomarbeit werden die Möglichkeiten und Grenzen des Zeitumkehrspiegels im Hinblick auf Anwendungen in der Raumakustik näher betrachtet. Durch den Vergleich von Schallfeld-Simulationen und Messungen mit einem echtzeitfähigen Zeitumkehr-System werden Kenntnisse über die Fokussion von Schallwellen gewonnen. So profitiert der Zeitumkehrspiegel bei der Fokussion von Schallwellen sogar von vermeintlich störenden Raumreflexionen (Phänomen der *super-resolution*), und ist durch das Miteinbeziehen des akustischen Raumes in der Lage bessere Ergebnisse als bisher bekannte Fokussionstechniken zu erzielen. Eine der Beschallungssituation angepasste Anordnung des Lautsprecherarrays ist von Vorteil und nicht alle Arrayformen erzielen gleich gute Ergebnisse.

Letztendliches Ziel ist die Erstellung einer echtzeitfähigen Realisation unter PD um mit Hilfe des Zeitumkehrspiegels Schallquellen im Raum zu positionieren.

## abstract

"Time Reversal Mirror" is a particularly in medical science approved method to focus sound energy at certain points within an arbitrary volume in space. Since the wave equation contains time as derivative of second order, the sound pressure  $p(r,t)$  as well as  $p(r,-t)$  describe a solution. Thus the wave equation can be considered as invariant against time reversal. This diploma thesis explores the potentials and limits of the Time Reversal Mirror with respect to the use in room acoustics.

By comparing simulations and real measurements of the time reversed soundfield we come to conclusions about the focussing of soundwaves, like the effect of *superresolution* and the efficiency of certain array arrangements.

A realtime realisation will finally be implemented in PD to position sound sources by means of the Time Reversal Mirror.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2. Die Wellengleichung</b>	<b>4</b>
2.1. Herleitung der Wellengleichung . . . . .	4
2.2. Lösung der Wellengleichung . . . . .	8
<b>3. Das Zeitumkehr Prinzip</b>	<b>10</b>
3.1. Erste akustische Versuche - Der Versuch von Stokes . . . . .	10
3.2. Vom zeitumkehrenden Hohlraum zum Zeitumkehrspiegel . . . . .	12
3.2.1. Super Resolution . . . . .	16
3.2.2. Spatiale Reziprozität . . . . .	17
3.3. Eigenschaften fokussierter Schallwellen . . . . .	19
3.3.1. Spatiale Fokussierungspunktbreite ( <i>focal spot width</i> ) . . . . .	19
3.3.2. Verhältniss von Haupt- zu Nebenmaxima ( <i>sidelobe level</i> ) . . . . .	20
3.3.3. Signal-Rauschabstand . . . . .	23
3.3.4. Temporale Fokussierung . . . . .	25
3.3.5. Zeitvariante Veränderungen . . . . .	26
<b>4. Signalverarbeitung</b>	<b>28</b>
4.1. Faltung mittels FIR-Filter . . . . .	29
4.2. Die schnelle Faltung . . . . .	30
4.3. Blockfaltungsmethoden . . . . .	31
4.4. Partitionierung der Impulsantwort . . . . .	35
4.4.1. Uniforme Teilung der Impulsantwort - Multi Delay Filter . . . . .	36
4.4.2. Nicht uniforme Teilung der Impulsantwort - die Gardner Faltung . . . . .	38
<b>5. Simulation</b>	<b>42</b>
5.1. Die Simulationsumgebung - Der IEM CUBE . . . . .	42
5.1.1. Raumgeometrie . . . . .	42
5.1.2. Berechnung der Nachhallzeit des CUBE und des mittleren Absorptionsgrades . . . . .	45
5.2. Modell der Spiegelquellen und Berechnung . . . . .	49
5.3. Berechnung des Schallfeldes . . . . .	53
5.4. Extraktion der Impulsantworten und Zeitumkehr . . . . .	55

---

<b>6. Messung</b>	<b>57</b>
6.1. Messung der Impulsantwort . . . . .	57
6.1.1. Messung mittels einfacher Impulserregung . . . . .	57
6.1.2. Messung mittels Time Dealy Spectrometry (TDS) . . . . .	59
6.1.3. Messung mittels Maximum Length Sequence . . . . .	62
6.1.4. Messung mittels logarithmischem Sinus-Sweep . . . . .	65
6.2. Messaufbau . . . . .	71
6.3. Messablauf . . . . .	73
<b>7. Ergebnisse aus Simulation und Messung</b>	<b>74</b>
7.1. Vergleich verschiedener Arrayformen . . . . .	75
7.1.1. Beschreibung der getesteten Array-Geometrien . . . . .	75
7.1.2. Ergebnisse aus Messungen an realer Installation . . . . .	78
7.1.3. Ergebnisse aus der Simulation . . . . .	80
7.2. Einfluss der Raumverhältnisse und Effekt der Superresolution . . . . .	82
7.3. Ausbreitung der virtuellen Punktquelle . . . . .	84
<b>8. Fazit &amp; Ausblick</b>	<b>85</b>
<b>9. Literaturverzeichnis</b>	<b>87</b>
<b>A. Anhang</b>	<b>90</b>
A.1. Gerätespezifikationen . . . . .	90

---

# 1. Einleitung

Inversion von Luftschall ist die zeitliche Umkehr einer akustischen Wellenfront. Eine zeitumgekehrte Schallwelle besitzt die Eigenschaft, genau den Weg zurückzulaufen, den sie gekommen ist, als spiele man einen Film rückwärts ab. Breitet sich eine Schallwelle beispielsweise von einem Punkt aus und wird dann zeitlich umgekehrt, so läuft sie durch das Ausbreitungsmedium zurück und fokussiert sich genau im Ausgangspunkt.

Die Inversion von Luftschall, sogar allgemein die Umkehr einer akustischen oder elektromagnetischen Welle ist in der Theorie kein großes Problem. In der Wellengleichung tritt die zeitliche Abhängigkeit in Form der Ableitung zweiter Ordnung auf. Dadurch existieren zwei äquivalente Lösungen, die als ein- und auslaufende Welle bezeichnet werden<sup>1</sup>. Mit der praktischen Umsetzung dieser Theorie wurde bereits vor 25 Jahren in der nichtlinearen Optik, in der Akustik vor circa 15 Jahren begonnen.

Umgekehrt wird die Welle mit einem sogenannten *zeitumkehrenden Spiegel*. Diese etwas futuristisch anmutende Bezeichnung besagt, dass die auftreffende Welle wie von einem Spiegel zurückgeworfen wird.

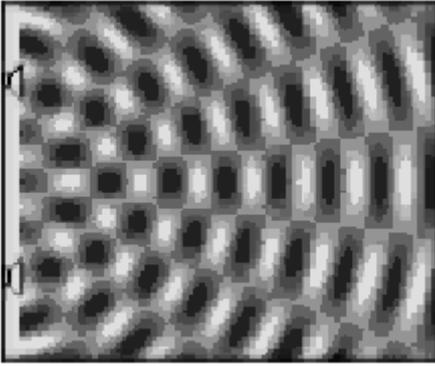
Es sind viele Anwendungen dieser Umkehr denkbar. Im Ultraschallbereich wird der zeitumkehrende Spiegel zur Nierensteinzertrümmerung (Lithropsie), zur Tumorbekämpfung mittels Hyperthermie<sup>2</sup> und nicht desktruktiven Materialprüfung genutzt. Weitere Anwendungen sind zum Beispiel in der Unterwasserakustik das Aufspüren von Minen, Unterseebooten oder im Meeresboden verborgenen Objekten.

Eine weitere, bisher noch weitgehend unerforschte Anwendung des zeitumkehrenden Spiegels stellt die moderne Beschallungstechnik dar. In traditionellen Beschallungstechniken werden Lautsprechergruppen verwendet, um eine Nachbildung aufgenommener Schallquellen zu erstellen. Finden qualitativ hochwertige Wiedergabesysteme eine sachgemäße Anwendung, können dennoch lediglich die korrekten temporären Eigenschaften des originalen Schallfeldes nachgebildet werden. Die räumlichen Eigenschaften der Reproduktion werden jedoch durch das Interferenzmuster der Lautsprecher stark beeinflusst, und bilden in keinster Weise das originale Schallfeld im Wiedergaberaum ab. Abbildung 1.1 zeigt das Wellenfeld einer monochromatischen Quelle, die mittels zweier omnidirektionalen Lautsprecher wiedergegeben wird. Die räumliche Abbildung des Schallfeldes stimmt meist nur in einem beschränkten Bereich, oft nur an einem bestimmten Punkt innerhalb des Raumes.

---

<sup>1</sup>Dies gilt nur in annähernd verlustfreien Medien, wenn also kein Dämpfungsterm vorhanden ist.

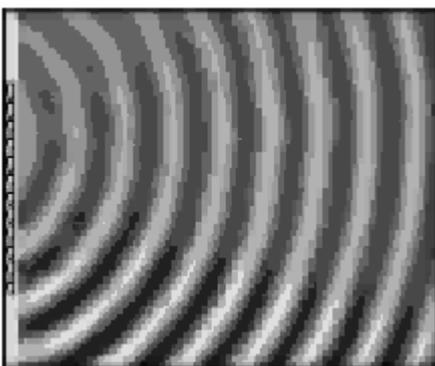
<sup>2</sup>Hyperthermie nennt man in der Medizin eine Behandlung durch künstliche Temperaturerhöhung des Körpergewebes.



**Abb. 1.1:** Schalldruckverteilung einer monochromatischen Quelle, wiedergegeben mit zwei Lautsprechern [2].

Findet zum Beispiel eine Verstärkung einer Schallquelle, die sich hinter den Lautsprechern befindet mittels zweier seitlich aufgestellten Lautsprechern statt, werden die meisten Zuschauer das von den Lautsprechern verstärkte Signal vor dem originalen Signal hören, was zu Fehllokalisationen führt, da das menschliche Ohr die Lokalisation eines Schallereignisses von dem zeitlich als erstes eintreffenden Schallstimulus abhängig macht (*Gesetz der ersten Wellenfront*).

Um all diesen Nachteilen traditioneller Beschallungstechniken aus dem Weg zu gehen und zeitlich, sowie räumlich korrekte Schallfeldabbildungen zu realisieren, ist man in den letzten Jahren dazu übergegangen Versuche mit ganzen Lautsprecher-Arrays anstatt mit einzelnen Lautsprechern zu machen (siehe Abbildung 1.2). Eines dieser modernen Beschallungsverfahren ist die *Wellenfeldsynthese*, die all die oben genannten Nachteile kompensiert. Das hier vorgestellte Verfahren der Schallfeldreproduktion mittels *Zeitumkehr* lehnt an dieses Verfahren an und basiert teilweise auf den gleichen physikalischen Grundprinzipien. Darüber hinaus hat die Schallfeldreproduktion mittels Zeitumkehr weitere Vorteile gegenüber der Wellenfeldsynthese. So wird zum Beispiel die akustischen Umgebung in das Wiedergabeverfahren miteinbezogen, und so auch unter akustisch schwierigen Bedingungen eine korrekte Reproduktion des Schallfeldes möglich gemacht.



**Abb. 1.2:** Schalldruckverteilung einer monochromatischen Punktschallquelle, die sich hinter einem Lautsprecher-Array befindet und von diesem abgebildet wird. Die Abbildung ist sowohl in ihren zeitlichen als auch in ihren räumlichen Eigenschaften korrekt [2].

Die Nachteile dieser array-orientierten Wiedergabesysteme liegen natürlich auf der Hand. So wird eine große Anzahl an Lautsprecher und Wiedergabekanälen sowie ein

leistungsstarkes Rechnersystem benötigt um eine Schallfeldreproduktion im hörbaren Frequenzbereich zu realisieren. Mit dem momentanen Entwicklungsstand der Audio-technik, sind solche Wiedergabesysteme aus Kosten- und Platzgründen sicherlich auf die Verwendung in Kinos, Opernhäusern oder Konzertsälen beschränkt und weniger für den Heimbedarf konzipiert<sup>3</sup>. Neuentwicklungen in der Lautsprechertechnologie (z.B. DML=**D**istributed **M**ode **L**oudspeaker), sowie die konsequente Leistungssteigerung moderner Computersysteme, verleiten jedoch zur Annahme, dass arrayförmige Wiedergabesysteme in vielen Anwendungsbereichen der Standard der Zukunft sind.

---

<sup>3</sup>Erste Ansätze zeigt unter anderem die Firma Yamaha mit dem *Digital Sound Projector*.

---

## 2. Die Wellengleichung

### 2.1. Herleitung der Wellengleichung

Mechanische Schwingungen können sich als Schallwellen in gasförmigen, flüssigen oder festen Medien ausbreiten. Ihre Ausbreitung hängt von der Art des Mediums ab. Schallwellen in Flüssigkeiten und Gasen verhalten sich gleichermaßen und lassen sich somit auf gleiche Art und Weise behandeln. Da in ausgedehnten Flüssigkeiten und Gasen keinerlei Schubspannungen auftreten können, gibt es in ihnen nur Longitudinalwellen, in denen die Schwingungsrichtung der angeregten Teilchen parallel zur Ausbreitungsrichtung liegt [19].

Die zur Beschreibung der Vorgänge im Schallfeld besonders wichtigen Feldgrößen, sind der Schalldruck  $p$ , die Dichte des Mediums  $\varrho$ , sowie die Schallschnelle  $\mathbf{v}$ . Während Schalldruck und Dichte skalare Größen sind, ist die Schallschnelle ein Vektor, da sie neben einer Größe noch eine Richtung im Raum aufweist. Dabei ist es wichtig eine Unterscheidung zwischen den Wechselgrößen und den explizit ohne Schall vorhandenen konstanten Größen zu treffen. So setzen sich die Größen Dichte  $\varrho$ , Druck  $p$  und Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  aus den räumlich und zeitlich stationären Werten  $\varrho_-, p_-$  und  $\mathbf{v}_-$  – die ohne Schallfeld vorhanden sind – und den veränderlichen Schallgrößen Wechseldichte  $\varrho_{\sim}$ , Schalldruck  $p_{\sim}$  und Schallschnelle  $\mathbf{v}_{\sim}$ <sup>1</sup> zusammen. Es gilt also:

$$p = p_- + p_{\sim} \quad (2.1a)$$

$$\varrho = \varrho_- + \varrho_{\sim} \quad (2.1b)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_- + \mathbf{v}_{\sim} \quad (2.1c)$$

Zwischen den Feldgrößen Schalldruck  $p$  und Schallschnelle  $\mathbf{v}$  besteht als erste Beziehung das *dynamische Grundgesetz von Newton*<sup>2</sup>, das auf ein beliebiges Volumenelement  $dV$  der Luft angewandt werden soll. In **Abbildung 2.1** ist dieses Element als ein Quader mit den Kanten  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  eingezeichnet.

In positiver  $x$ -Richtung wirkt die Kraft  $p dz dy$ , in negativer  $x$ -Richtung die Kraft  $(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx) dy dz$ . Die resultierende Differenz  $-\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz$  bewirkt eine Beschleunigung

<sup>1</sup>Die Schallschnelle bezeichnet die Geschwindigkeit der Luftmoleküle, und **nicht** die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Wellenzustandes.

<sup>2</sup>Das 2. Newtonsche Axiom (*Dynamisches Grundgesetz*): Die Bewegung eines Körpers ändert sich proportional zur einwirkenden Kraft, wobei die Masse der Proportionalitätsfaktor ist.

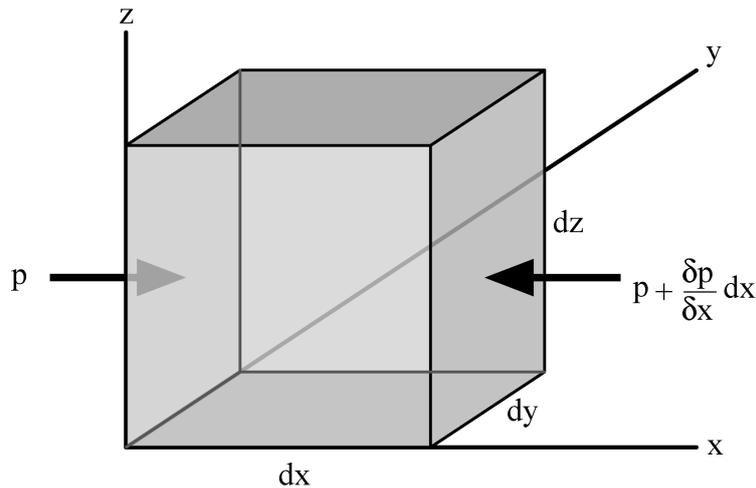


Abb. 2.1.: Die Kräfte am Volumenelement

in  $x$ -Richtung  $\frac{dv_x}{dt}$  der Masse  $\varrho dx dy dz$ , wobei wir mit  $\varrho$  die Dichte der Luft bezeichnen, die bei  $20^\circ\text{C}$  rund  $\varrho = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ g/cm}^3$  beträgt. Obwohl die Dichte  $\varrho$  durch das Schallfeld verändert wird, kann sie aufgrund der im Vergleich zur konstanten mittleren Dichte  $\varrho$ -geringen Veränderung bei dieser Beziehung als konstant angesehen werden.

Gemäß dem 2. Newtonschen Axiom kann man für den dreidimensionalen Raum die folgenden Gleichungen aufstellen.

$$-\frac{\partial p}{\partial x}(dx dy dz) = \varrho(dx dy dz) \cdot \frac{dv_x}{dt} \quad (2.2a)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y}(dx dy dz) = \varrho(dx dy dz) \cdot \frac{dv_y}{dt} \quad (2.2b)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z}(dx dy dz) = \varrho(dx dy dz) \cdot \frac{dv_z}{dt} \quad (2.2c)$$

Durch Benutzung eines Gradienten<sup>3</sup> können diese Gleichungen zu einer einzigen Vektorgleichung zusammengefaßt werden.

$$-\text{grad } p = \varrho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (2.3)$$

<sup>3</sup>Der Gradient eines Skalarfeldes  $\varphi(\mathbf{r})$  ist definiert als der Vektor der partiellen Ableitungen. Er existiert daher nur an den Stellen, an denen  $\varphi$  bezüglich aller Koordinaten partiell differenzierbar ist. Er wird als  $\nabla\varphi$  oder als  $\text{grad } \varphi$  geschrieben. Dabei ist  $\nabla$  der sogenannte Nabla-Operator und  $\text{grad}$  das Funktionssymbol des Gradienten. Für den Fall eines Skalarfeldes  $\varphi(x, y, z)$  ist der Gradient in kartesischen Koordinaten definiert als  $\text{grad } \varphi = \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{e}_z$

Die Schallschnelle ist eine Funktion, die innerhalb des Schallfeldes sowohl vom Ort als auch von der Zeit abhängt. Die Änderung der Geschwindigkeit des Volumenelements ist durch das totale Differential der Funktion  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  gegeben:

$$d\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dt + (d\mathbf{r} \text{ grad})\mathbf{v} . \quad (2.4)$$

Der erste Summand berücksichtigt, dass sich das Geschwindigkeitsfeld zeitlich ändert, der zweite, dass das Volumenelement durch seine Bewegung an einen anderen Ort gelangt. Der Quotient aus Geschwindigkeitsänderung und Zeitzuwachs, die Beschleunigung des Volumenelements, ist daher:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \text{ grad})\mathbf{v} . \quad (2.5)$$

Diese Beschleunigung der in dem Volumenelement enthaltenen Masse  $\varrho dx dy dz$  wird durch eine Kraft hervorgerufen, die proportional der Differenz der auf die Begrenzungsflächen des Volumenelements wirkenden Drücke ist. Damit gilt das 2. Newtonsche Axiom (*Aktionsgesetz*) in der Form

$$\varrho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \text{ grad})\mathbf{v} \right] = -\text{grad } p . \quad (2.6)$$

Die zur Herleitung der Wellengleichung notwendigen hydromechanischen Grundgleichungen erfassen auch das Verhalten von Schallwellen sehr großer Intensität. In der Raumakustik kann man sie vereinfachen, da die Wechselgrößen stets als klein gegen die Gleichgrößen vorausgesetzt werden. Genauso wie wir weiter oben bereits die Wechseldichte vernachlässigt haben, und  $\varrho$  als konstant angesehen haben, kann man ebenfalls die räumliche Geschwindigkeitsänderung, also  $(\mathbf{v} \text{ grad})\mathbf{v}$ , gegenüber der zeitlichen Änderung  $(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t})$  vernachlässigen.

Die erste Schallfeldgleichung lautet somit:

$$\boxed{-\text{grad } p = \varrho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} .} \quad (2.7)$$

Eine weitere notwendige hydrodynamische Grundgleichung ist die *Kontinuitätsgleichung*. Sie drückt das Gesetz der Erhaltung der Masse aus. Die in der Zeitspanne  $dt$  durch die Oberfläche  $A$  eines Raumes mit dem Volumen  $V$  ausströmende Masse  $dt \oint_A \varrho \mathbf{v} d\mathbf{A}$  ist gleich der Abnahme der in dem Volumenelement enthaltenen Masse  $-dt \frac{\partial}{\partial t} \int_V \varrho dV$ . Verwandelt man das Oberflächenintegral mit Hilfe des Gaußschen Satzes in ein Volumenintegral, so ergibt sich<sup>4</sup>:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \varrho dV = \oint_A \varrho \mathbf{v} d\mathbf{A} = \int_V \text{div}(\varrho \mathbf{v}) dV . \quad (2.8)$$

---

<sup>4</sup>Die Divergenz eines Vektorfeldes  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  ist ein skalares Feld. Es wird als  $\text{div } \mathbf{F}$  oder als  $\nabla \mathbf{F}$  geschrieben. Dabei bezeichnet  $\nabla$  den Nabla-Operator und  $\text{div}$  das Funktionssymbol der Divergenz. Für den Fall eines kartesischen Vektorfeldes  $\mathbf{F}(x, y, z)$  ist die Divergenz definiert als  $\text{div } \mathbf{F} = \nabla \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$

---

Da die Gleichung (2.8) für beliebige Raumelemente gilt, stimmen die Integranden überein. Man erhält also

$$\boxed{\operatorname{div}(\varrho \mathbf{v}) = -\frac{\partial \varrho}{\partial t}} . \quad (2.9)$$

Neben den Gleichungen (2.6) und (2.8) benötigt man noch den Zusammenhang zwischen Druck  $p$  und Dichte  $\varrho$ , d.h. die *Zustandsgleichung des Mediums*. In einer Schallwelle erfolgen im Allgemeinen die Zustandsänderungen so rasch, daß keine Zeit zum Temperaturengleich mit der Umgebung bleibt. Die Zustandsänderungen verlaufen daher nicht isotherm<sup>5</sup>, sondern adiabatisch<sup>6</sup>. Aus dem *Adiabatengesetz* folgt für Gase die Beziehung

$$pV^\varkappa = \text{const}, \quad (2.10)$$

wobei  $\varkappa = \frac{c_p}{c_v}$  das Verhältnis der spezifischen Wärmekapazität bei konstantem Druck zu derjenigen bei konstantem Volumen darstellt. Bei kleinen Amplitudenänderungen ( $\varrho_\sim \ll \varrho_-$ ) kann man folgenden Zusammenhang zwischen Schalldruck  $p_\sim$  und Wechseldichte  $\varrho_\sim$  herstellen:

$$p_\sim = \frac{\varkappa p_-}{\varrho_-} \varrho_\sim . \quad (2.11)$$

Darin steht  $\varrho_-$  wie bereits erwähnt für die Ruhedichte des Gases und  $p_-$  für den Gleichdruck des Gases, der in den meisten Fällen dem Atmosphärendruck gleichzusetzen ist.

Setzt man zur Abkürzung bei Gasen

$$c = \sqrt{\frac{\varkappa p_-}{\varrho_-}} , \quad (2.12)$$

so gilt folgende Beziehung zwischen Schalldruck und Wechseldichte:

$$\boxed{p_\sim = c^2 \varrho_\sim} . \quad (2.13)$$

Das theoretisch einfachste Wellenbild ist die *ebene Welle*, bei der die Schallfeldgrößen nur von einer Ortskoordinate, hier  $x$ , abhängen. Der Schnellevektor  $\mathbf{v}$  besitzt in diesem Fall nur eine Komponente  $\mathbf{v}_x = v$  in  $x$ -Richtung (Ausbreitungsrichtung). Unter Verwendung der Gleichung (2.13), lauten die Gleichungen (2.7) und (2.9):

$$\varrho_- \frac{\partial v_\sim}{\partial t} = -\frac{\partial p_\sim}{\partial x} \quad (2.14)$$

und

$$\varrho_- \frac{\partial v_\sim}{\partial x} = \frac{\partial \varrho_\sim}{\partial t} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial p_\sim}{\partial t} . \quad (2.15)$$

Das System von partiellen Differentialgleichungen (2.14) und (2.15) enthält noch beide Schallfeldgrößen Schalldruck  $p_\sim$  und Schallschnelle  $v_\sim$ . Zur Elimination der Schnelle wird

<sup>5</sup>Isotherm nennt man eine Zustandsänderung bei der die Temperatur unverändert bleibt[18].

<sup>6</sup>Bezeichnung für Vorgänge in Gasen, die ohne Wärmeaustausch mit der Umgebung ablaufen[18].

Gleichung (2.14) nach dem Ort  $x$  und Gleichung (2.15) nach der Zeit  $t$  differenziert. So erhält man für den Schalldruck  $p_{\sim}$  im ebenen Fall die *Wellengleichung*:

$$\Delta p = \frac{\partial^2 p_{\sim}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_{\sim}}{\partial t^2} . \quad (2.16)$$

Im allgemeinen, nicht auf eine Ausbreitungsrichtung beschränkten Fall lautet die *Wellengleichung*:

$$\Delta p = \frac{\partial^2 p_{\sim}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_{\sim}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p_{\sim}}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_{\sim}}{\partial t^2} . \quad (2.17)$$

## 2.2. Lösung der Wellengleichung

Der Ausgangspunkt ist zunächst die im letzten Abschnitt abgeleitete Wellengleichung (2.16) für ebene Wellen. Man kann leicht sehen, dass jede beliebige, zweimal differenzierbare Funktion  $f$  eine Lösung dieser partiellen Differentialgleichung ist, sofern sie die Variablen  $x$  und  $t$  in der Kombination  $x - ct$  enthält. In der Tat ergibt sich nach zweimaligem, partiellem Ableiten für  $f(u)$  und  $u = x - ct$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''(u) \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = f''(x - ct) \quad (2.18)$$

und

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = f''(u) \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 = c^2 f''(x - ct) . \quad (2.19)$$

Genauso erkennt man, dass auch jede beliebige, zweimal differenzierbare Funktion  $g(x+ct)$  eine Lösung der ebenen Wellengleichung ist. Damit lautet die allgemeine Lösung der eindimensionalen Wellengleichung:

$$p(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) . \quad (2.20)$$

Gleiches gilt für eine Kugelwelle. Das der Geometrie einer Kugelwelle angepasste Koordinatensystem ist das der sphärischen Polarkoordinaten. In ihm wird die Lage eines Punktes durch seinen Abstand  $r$  vom Koordinatenursprung bestimmt, außerdem durch den Polarwinkel  $\theta$ , den die Verbindungslinie zwischen dem Punkt und dem Ursprung mit der sogenannten Polarachse bildet sowie den Azimuthwinkel  $\Phi$ , den die Projektion dieser Verbindungslinie in eine zur Polarachse senkrechte Ebene mit einer weiteren, in dieser Ebene liegenden festen Achse bildet.

---

<sup>7</sup>Der Laplace-Operator oder Deltaoperator  $\Delta$  ist in der mehrdimensionalen Analysis ein wichtiger Differentialoperator, der die Summe der reinen zweiten partiellen Ableitungen einer Funktion von mehreren Variablen ermittelt. Angewandt auf eine Funktion  $\varphi$  lautet der Laplace Operator:  $\Delta\varphi = \operatorname{div}(\operatorname{grad})\varphi = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k^2}$ .

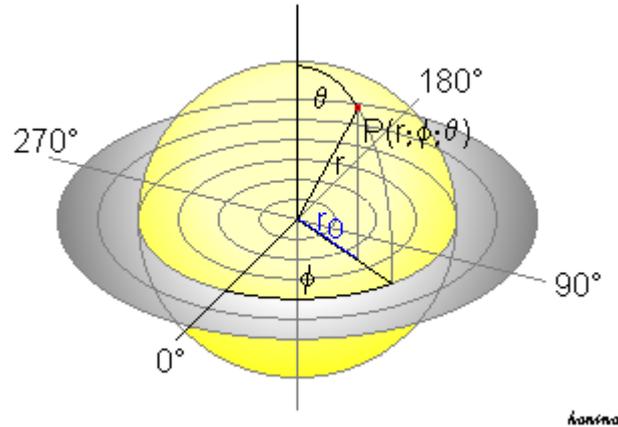


Abb. 2.2.: Sphärische Polarkoordinaten [13]

Drückt man den Laplace-Operator  $\Delta$  in Kugelkoordinaten  $r, \theta, \Phi$  aus und berücksichtigt, dass der Schalldruck auf jeder Kugeloberfläche konstant, also unabhängig von den Winkelkoordinaten  $\theta$  und  $\Phi$  sein soll, folgt folgender Ausdruck:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} . \quad (2.21)$$

Durch die Substitution  $p(r, t) = f(r, t)/r$  kann dieser Ausdruck in die uns schon bekannte eindimensionale Form

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (2.22)$$

gebracht werden (siehe Gleichung (2.16)), deren Lösung sich wie bei der ebenen Welle vollzieht, d.h. mittels einer beliebigen, zweimal differenzierbaren Funktion der Variablenkombination  $r - ct$ . Damit ist der Schalldruck in der allgemeinen Kugelwelle:

$$p(r, t) = \frac{1}{r} f(r - ct) . \quad (2.23)$$

Wie bei einer ebenen Welle breitet sich also eine anfängliche Druckstörung mit der Schallgeschwindigkeit  $c$  in Richtung zunehmender  $r$ -Werte, d.h. von innen nach außen aus. Allerdings verkleinert sich die Druckstörung mit wachsendem Laufweg, was verständlich ist, da die Welle im Zuge ihrer Ausbreitung immer größere Bereiche erfasst und sich dadurch "verdünnt". Natürlich würde auch hier die Variablenkombination  $r + ct$  zur Lösung der Wellengleichung führen. Sie würde eine sich auf den Punkt  $r = 0$  zusammenziehende Kugelwelle repräsentieren [16].

## 3. Das Zeitumkehr Prinzip

Die herausforderndsten Anwendungen im Bereich der hörbaren Akustik, wie die Erzeugung eines virtuellen Raumklanges oder aktive Lärmbekämpfung (*active noise control*) sind auf die Fähigkeit eines Wiedergabesystemes zur genauen Erzeugung eines gewünschten Schallfeldes angewiesen. Diese Genauigkeit muss sowohl in spatialer, sowie temporaler Hinsicht in einem begrenzten, den Hörer umgebenden Raum gewährleistet sein. Theoretisch betrachtet sind diese Anforderungen eng mit dem spatial und temporal exakten Fokussieren von Schallwellen verknüpft. Da das Ausbreitungsmedium in der Praxis *a priori* unbekannt und komplex (zahlreiche Reflexionen, Absorptionseffekte usw.) ist, muss der Vorgang der Fokussierung adaptiv sein. Die Fokussierung mittels Zeitumkehr ist nur einer unter vielen Ansätzen, der sich jedoch unabhängig vom Ausbreitungsmedium als effizient und dennoch einfach herausgestellt hat.

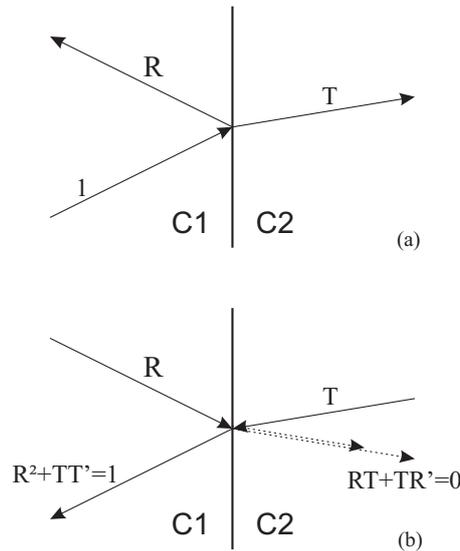
In Kapitel 2 wurde die Wellengleichung und ihre Lösung für ebene, sowie für Kugelwellen hergeleitet. In dem idealen Fall eines verlustfreien Mediums mit nicht absorbierenden Raumbegrenzungen, lässt sich die Ausbreitung einer Schallwelle sehr einfach durch Gleichung (2.16) beschreiben. Wie bereits in Kapitel 2.2 beschrieben, sind die Lösungen der Wellengleichungen invariant unter Zeitumkehr, da die Zeit lediglich als Ableitung zweiter Ordnung in Kraft tritt. Dieses Merkmal ist der Startpunkt des Zeitumkehr-Prinzips.

Unter der Zeitumkehr eines Wellenfeldes wird eine divergierende Welle in eine konvergente gewandelt, die letztendlich in einem Punkt zusammenläuft. Anders als bei einem normalen Spiegel, der ein virtuelles Abbild eines akustischen Objektes hervorbringt, ist das Abbild des Zeitumkehrspiegels real und gleicht dem ursprünglichen Signal. Selbst bei Vorhandensein eines inhomogenen Mediums zwischen Spiegel und Zielpunkt, wird sich das Signal wie gewünscht fokussieren.

### 3.1. Erste akustische Versuche - Der Versuch von Stokes

Die speziellen Eigenschaften der Zeitumkehr von Wellen wurden erstmals von *Stokes* [6] im Rahmen eines klassischen Experimentes von Reflektion und Transmission einer ebenen Welle entlang einer Grenzschicht zweier Medien mit unterschiedlichen Schallgeschwindigkeiten untersucht (siehe Abbildung 3.1) [9].

Betrachtet man eine ebene Welle mit der Amplitude 1, die sich von einem Medium 1 zu einem anderen Medium 2 ausbreitet, so wird man eine reflektierte ebene Welle mit der

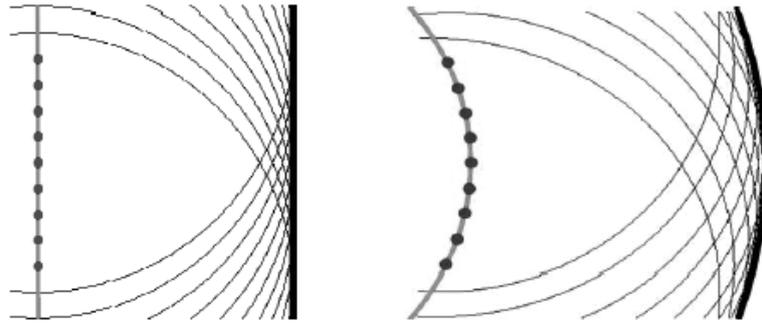


**Abb. 3.1.:** (a) Reflexion und Transmission einer ebenen Welle entlang einer Grenzschicht zweier Medien mit unterschiedlichen Schallgeschwindigkeiten. (b) Zeitumkehr des Vorganges aus Bild 3(a) [9].

Amplitude  $R$ , sowie eine transmittierte ebene Welle mit der Amplitude  $T$  beobachten. Mit dieser Anordnung beginnend, in der sich das Schallfeld  $p(\mathbf{r}, t)$  aus den besagten drei Teilen zusammensetzt, untersuchte Stokes ob dieses Experiment ebenfalls unter Zeitumkehr gültig ist. Er benutzte hierfür die Eigenschaften der ebenen Welle, dass die Zeitumkehr durch ändern, bzw. umdrehen der Ausbreitungsrichtung möglich ist. Die zeitumgekehrte Lösung  $p(\mathbf{r}, -t)$  kann als ein neues Set von drei Wellen beschrieben werden: eine vom Medium 1 zum Medium 2 einfallende Welle der Amplitude  $R$  und eine vom Medium 2 zum Medium 1 einfallende Welle der Amplitude  $T$ . Durch Reflexion bzw. Transmission ergeben diese die dritte Welle der Amplitude 1, die sich im Medium 1 ausbreitet. Betrachtet man  $R'$  und  $T'$  als Reflektions- bzw. Transmissionskoeffizienten einer vom Medium 2 einfallenden Welle, ergeben sich durch Superposition letztendlich vier ebene Wellen, wobei sich jeweils zwei im Medium 1 und Medium 2 ausbreiten. Um die exakte zeitumgekehrte Situation herzustellen, ist ersichtlich, dass:

$$\begin{aligned} R^2 + TT' &= 1 \\ R + R' &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Haben die reflektierte und transmittierte Wellen eine reale Wellenzahl, können die Gleichungen (3.1) durch einfache Berechnung verifiziert werden [9].



**Abb. 3.2.:** Darstellung des *Huygensschen Prinzips*. Die Punkte stellen die Sekundärquellen dar, die auf der primären Wellenfront liegen (graue Linie). Die dicke schwarze Linie zeigt die Einhüllende der Sekundärquellen und die dadurch erzeugte neue Wellenfront.

## 3.2. Vom zeitumkehrenden Hohlraum zum Zeitumkehrspiegel

In jedem Ausbreitungsexperiment bestimmen die Anfangsbedingungen (Schallquelle, Randbedingungen) eine eindeutige Lösung  $p(\mathbf{r}, t)$  der Wellengleichung. Das Ziel eines Zeitumkehr-Experimentes ist die Veränderung der Anfangsbedingungen, um die Lösung  $p(\mathbf{r}, -t)$  zu erzeugen. Aus Gründen der Kausalität ist dies jedoch keine gültige Lösung. Deshalb beschränkt man sich auf die Erzeugung von  $p(\mathbf{r}, T - t)$ .

Eine Umkehr des Schallfeldes wäre theoretisch durch die Bestimmung des Schalldruckes  $p_V(\mathbf{r}, t)$  durch Abtastung des gesamten Volumens und der zeitverkehrten Rekonstruktion durch  $p_V(\mathbf{r}, T - t)$  gewährleistet. Nachvollziehbarerweise ist dies praktisch jedoch nicht realisierbar. Eine realistische Ansatz bedient sich des *Huygensschen Prinzips*.

**Huygenssches Prinzip** Gemäß dem aus den Niederlanden stammenden Physiker Christiaan Huygens (1629 – 1695), kann jeder Punkt einer Wellenfront selbst als Ausgangspunkt von Sekundärwellen (Kugelwellen) angesehen werden, die sich mit gleicher Geschwindigkeit und Wellenlänge wie die ursprüngliche Welle ausbreiten. Die Einhüllende dieser Sekundärwellen stellt wiederum eine neue Wellenfront dar. Dieses Prinzip lässt sich für jeden Augenblick der Ausbreitung einer Welle anwenden, so dass man deren Amplitude im Raum zu jedem Zeitpunkt berechnen kann (siehe Abbildung 3.2).

Eine mathematische Formulierung des Huygensschen Prinzips erfolgt durch das Kirchhoff-Helmholtz-Integral (3.2). Demnach kann, ist das Schallfeld an der Oberflächen eines beliebigen, jedoch quellenfreien Volumens bekannt, unter Verwendung des Kirchhoff-Helmholtz-Integrals

$$P_A = \frac{1}{4\pi} \int_S (P \nabla G - G \nabla P) \mathbf{n} dS, \quad (3.2)$$

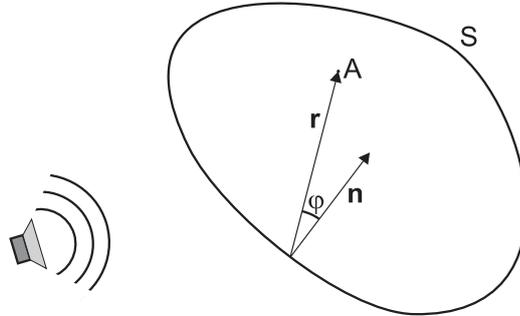
die Schallfeldverteilung an jedem Punkt innerhalb des Volumens berechnet werden, wobei

$$G = \frac{e^{-jkr}}{r} + F \quad (3.3)$$

die allgemeine Greensche Funktion und

$$r = \sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2} \quad (3.4)$$

den Betrag des Vektors  $\mathbf{r}$  von der Oberfläche eines beliebigen Volumens zum Beobachtungspunkt darstellen (siehe auch Abbildung 3.3).



**Abb. 3.3.:** Die grafische Veranschaulichung des Kirchhoff-Helmholtz-Integrals. Hierbei ist  $S$  die Oberfläche eines Volumens,  $\mathbf{r}$  der Vektor von der Oberfläche zum Aufpunkt  $A$ , an dem das Wellenfeld berechnet werden soll,  $\mathbf{n}$  der Normalenvektor der Oberfläche  $S$ .  $P_A$  ist der Schalldruck am Aufpunkt und  $k$  die Wellenzahl.

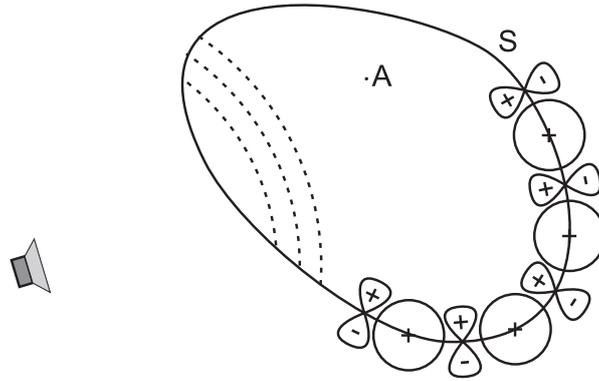
Durch Auflösung der partiellen Ableitungen und unter Verwendung der Gleichung (siehe auch (2.7) auf Seite 6)

$$\frac{\partial P}{\partial n} = -j\omega \varrho V_n \quad (3.5)$$

erhält man das Kirchhoff-Helmholtz Integral in der Form

$$P_A = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[ \left( P \frac{1 + jkr}{r^2} \cos \varphi e^{-jkr} \right) + \left( j\omega \varrho V_n \frac{e^{-jkr}}{r} \right) \right] dS . \quad (3.6)$$

Hier zeigen sich die Möglichkeiten zur Schallfeldsynthese. Das Integral in Gleichung (3.6) besteht aus zwei Termen. Der erste Term repräsentiert dabei eine Verteilung von Dipolquellen, die proportional dem an der Volumensoberfläche herrschenden Schalldruck angesteuert werden. Der zweite Term stellt eine Verteilung von Monopolquellen dar, die wiederum proportional der normal zur Volumensoberfläche vorherrschenden Schallschnelle betrieben werden [28]. Die Monopol- und Dipolquellen stellen Sekundärquellen auf der Oberfläche  $S$  dar. Ein beliebiges Wellenfeld kann somit im Inneren des Volumens rekonstruiert werden indem man den von einer realen Quelle erzeugten Schalldruck und die Schallschnelle mithilfe der Monopol- und Dipolquellen auf der Oberfläche  $S$  wiedergibt (siehe Abbildung 3.4). Das Schallfeld außerhalb der Volumens löscht sich durch destruktive Interferenz aus.



**Abb. 3.4.:** Der Schalldruck innerhalb eines beliebigen Volumens kann mittels Monopol- und Dipolquellen vollständig synthetisiert werden. Außerhalb des Volumens löscht sich das Schallfeld durch die destruktive Interferenz der Mono- und Dipole aus.

Die Komplexität des Helmholtz-Kirchhoff-Integrals resultiert aus dessen Eigenschaft, das Schallfeld außerhalb des Volumens auszulöschen. Ist dies in der Anwendung nicht notwendig, kann das Schallfeld mittels der Rayleigh-Gleichungen durch entweder Monopolquellen (3.7) oder Dipolquellen (3.8) synthetisiert werden.

$$P_A = \frac{1}{2\pi} \int_S \left[ j\omega \rho V_n \frac{e^{-jkr}}{r} \right] dS \quad \dots \text{Rayleigh I} \quad (3.7)$$

$$P_A = \frac{1}{2\pi} \int_S \left[ P \frac{1 + jkr}{r^2} \cos \varphi e^{-jkr} \right] dS \quad \dots \text{Rayleigh II} \quad (3.8)$$

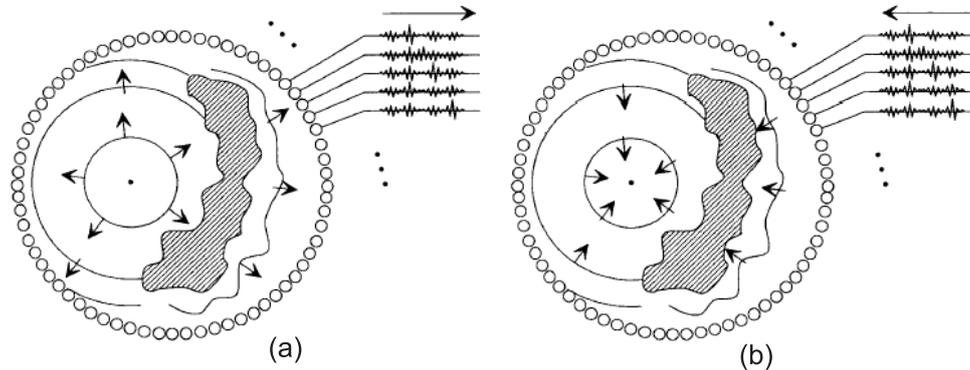
Basierend auf dem Huygensschen Prinzip ist das Wellenfeld also in jedem Punkt eines Raumes synthetisierbar, wenn das originale Wellenfeld entlang einer geschlossenen Oberfläche bekannt ist. Dadurch reduziert sich die Zeitumkehr-Operation von einem dreidimensionalen Volumen auf eine zweidimensionale Fläche.

**Der zeitumkehrende Hohlraum** Eine in der Theorie ideale Anordnung eines Zeitumkehr-Experimentes ist der zeitumkehrende Hohlraum (*closed time-reversal cavity*). Er stellt eine nicht dissipative Umgebung dar, dessen Begrenzungen ideal reflektierend sind. Da jeder Verlust durch Absorption einem Informationsverlust gleichkommt, würde sich dies in einer verminderten Qualität der Schallfeld-Rekonstruktion auswirken.

Das Verfahren zur zeitlichen Umkehr eines Wellenfeldes besteht nun aus lediglich zwei Schritten (siehe Abbildung 3.5):

1. Das von einem Signal erzeugte Druckfeld  $p(\mathbf{r}_s, t)$ , ist entlang der Oberfläche eines Raumes mittels Mikrofonen zu erfassen. Wir nehmen dabei an, das es möglich ist jeden Punkt der Oberfläche meßtechnisch zu erfassen.

2. An die Position der Mikrofone werden Lautsprecher gesetzt, die das eben erfasste Wellenfeld zeitlich umgekehrt ( $p(\mathbf{r}_s, T - t)$ ) wiedergeben. Das daraus erfolgte Wellenfeld konvergiert nun exakt in dem Punkt des Raumes, in dem zuvor das Messsignal erzeugt wurde.



**Abb. 3.5.:** Der Zeitumkehrende Hohlraum: (a) Aufnahme Schritt: Die Oberfläche eines geschlossenen Hohlraumes wird mit Mikrofonen versehen. Eine Punktschallquelle erzeugt eine Wellenfront die durch die im Medium enthaltenen Inhomogenitäten verzerrt wird. Das verzerrte Druckfeld wird am Rand durch die Mikrofone aufgezeichnet. (b) Zeitumkehr: Die Mikrofone in (a) werden durch Lautsprecher ersetzt. Die aufgezeichneten Signale werden zeitlich umgekehrt wiedergegeben. Das so erzeugte Wellenfeld breitet sich auf umgekehrtem Weg im Medium aus und fokussiert sich exakt am Ursprung [9].

**Der Zeitumkehrspiegel** Zwar ist ein zeitumkehrender Hohlraum ein ideales Mittel um eine zeitumgekehrte Wellenfront zu erzeugen, in der Praxis ist es jedoch schwer, ein solch abgeschlossenes Versuchs-Volumen zu realisieren. Allein die gesamte Region mit Schallaufnehmern und Lautsprechern zu umschließen ist unmöglich. Da jedoch oft nur einzelne Gebiete innerhalb des Raumes von Interesse sind, wird der Einsatz von Wandlermatrizen möglich. In diesem Fall wird der zeitumkehrende Hohlraum durch einen zeitumkehrenden Spiegel ersetzt. Dieser kann eben oder vorfokussiert sein, ein- oder zweidimensional. Seine Eigenschaften betreffend der Fokussierung sind, wenngleich es auch Einschränkungen in der Effizienz gibt, mit der einer abgeschlossenen Hohlkugel vergleichbar.

Durch die Auflösung einer kontinuierlichen Wiedergabeordnung, wie sie beim zeitumkehrenden Hohlraum der Fall ist, tauchen durch die spatiale Diskretisierung der Wiedergabeelemente weitere Nebeneffekte auf.

Wie bei der zeitdiskreten Abtastung kontinuierlicher Signale, gilt es auch bei raumdiskreter Abtastung ein entsprechendes Abtasttheorem zu beachten. Ähnlich dem Nyquisttheorem, das eine korrekte temporale Rekonstruktion des zeitlich abgetasteten Signals gewährleistet, muss für die spatiale Anordnung der Wiedergabeelemente gelten:

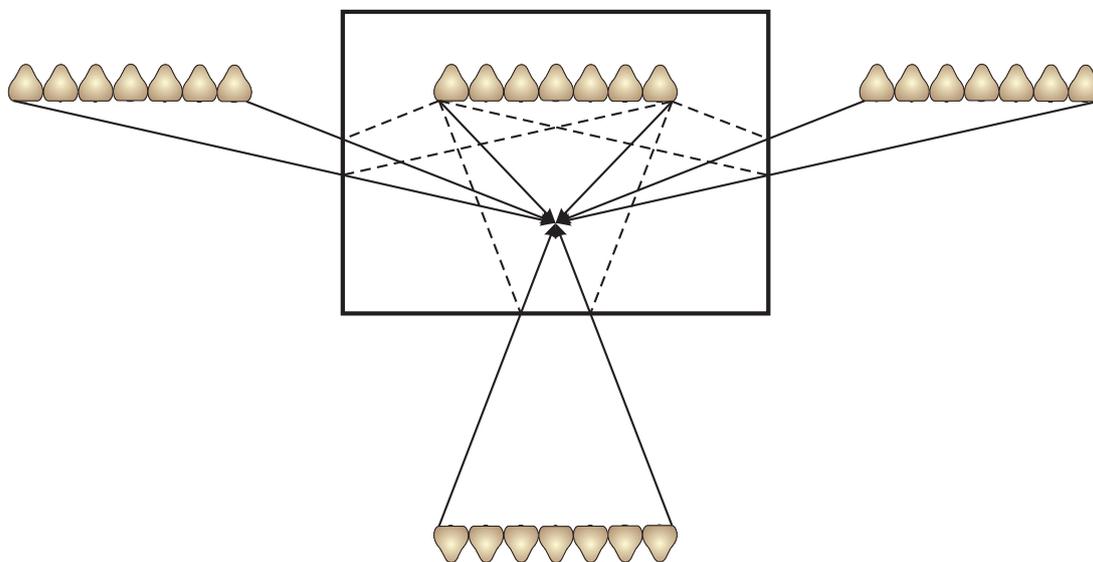
$$\Delta x < \frac{\lambda_{OG}}{2} = \frac{2c}{f_{OG}} \quad (3.9)$$

Es wird also ein Lautsprecherabstand  $\Delta x$  gefordert, der maximal eine halbe Wellenlänge der oberen Grenzfrequenz  $f_{OG}$  betragen darf.

### 3.2.1. Super Resolution

In der Raumakustik erfolgt die Ausbreitung einer Wellenfront in der Regel in einem geschlossenen Volumen mit reflektierenden Randbegrenzungen. Diese spezielle Anordnung birgt Eigenschaften, die aus Versuchen im Ultraschallbereich bereits bekannt sind.

In [22] haben Roux und Fink anhand eines verlustfreien Ultraschall-Hohlleiters gezeigt, dass der Prozess der Zeitumkehr von Reflektionen an Randbegrenzungen stark profitiert. Die durch die Reflektionen entstandenen Spiegelquellen (siehe Abbildung 3.6) stellen eine virtuelle Vergrößerung des Zeitumkehrspiegels dar und resultieren in einer verbesserten Fokussierung. Versuche im Freifeld erlangten bei weitem keine vergleichbar guten Resultate. Bei Versuchen an einer geschlossenen, zweidimensionalen, chaotischen Versuchsumgebung in Form eines Silikon Wafers haben C.Draeger und M.Fink festgestellt [5], dass die in den Reflektionen, oder virtuellen Abbildern der Quelle, enthaltenen Informationen ausreichen, um mit nur einer realen Quelle per Zeitumkehr eine Fokussierung zu erreichen. Diese Phänomen wird als *super resolution* bezeichnet.



**Abb. 3.6.:** Prinzip der Spiegelquellen: Ein Betrachter **S** nimmt nicht nur die realen Schallquellen des Lautsprecherarrays sondern aufgrund der Reflektionen an den Randbegrenzungen auch die virtuellen Spiegelquellen wahr [31].

In der Raumakustik herrschen natürlich andere Bedingungen als auf dem Silikon Wafer in [5]. Dennoch wurde in anderen Versuchen gezeigt, dass der Effekt der *super resolution* auch im Bereich des Hörschalls und in weniger reflektierenden Umgebungen eine Verbesserung der Fokussierung zur Folge hat.

Versuche und Simulationen im Hörschallbereich zeigen weitere Eigenschaften und Problematiken des Zeitumkehrspiegels auf. Yon *et al.* haben in [30] Versuche in einem gewöhnlichen Zimmer dokumentiert und unter anderem Erkenntnisse über die spatiale und temporale Fokussierung und das Verhalten gegenüber Veränderungen des Ausbreitungsmediums erlangt. Sie beschränkten sich dabei auf den für Sprache charakteristischen Frequenzbereich<sup>1</sup>. Ribay *et al.* gelangten mittels numerischer Simulationen (Methode der finiten Elemente) zu ganz ähnlichen Resultaten [24].

### 3.2.2. Spatiale Reziprozität

Der Versuchsaufbau in [30] bedient sich der spatialen Reziprozitätseigenschaft eines Mediums um die Versuchsanordnung (siehe Abbildung 3.7) zu vereinfachen. Dabei geht man davon aus, dass eine akustische Welle die am Fokussierungspunkt  $\mathbf{r}_{fp}$  erzeugt wird an einem Lautsprecher  $\mathbf{Y}_i$  des Zeitumkehrspiegels das gleiche Druckfeld erzeugt, wie eine Welle, die sich vom Lautsprecher zum Fokussierungspunkt ausbreitet und dort gemessen wird. Zu Grunde liegt die Tatsache, dass in der Akustik Quelle und Senke vertauscht werden können, ohne dass sich die akustischen Eigenschaften des Ausbreitungspfad ändern. Dies spiegelt sich in der Eigenschaft der Greenschen-Funktion, dass  $G(\mathbf{Y}_i, \mathbf{r}_{fp}, t) = G(\mathbf{r}_{fp}, \mathbf{Y}_i, t)$  ist, wider. Dadurch kann man sich eine komplexe Anordnung von Lautsprechern und koaxial montierten Mikrofonen ersparen, da es reicht in der Aufnahmephase die Impulsantwort der einzelnen Lautsprecher am späteren Fokussierungspunkt mittels eines Mikrofones zu messen.

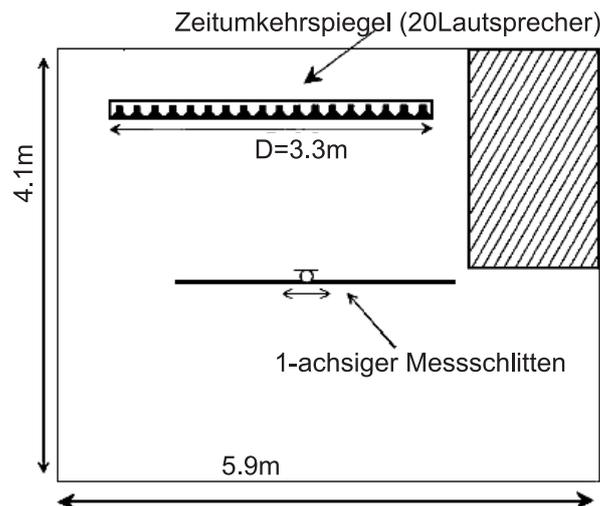


Abb. 3.7.: Versuchsaufbau in [30].

<sup>1</sup>300Hz-4000Hz

**Zeitumkehr** Da weder Lautsprecher noch Mikrofone neutrale Übertragungsverhalten haben, ist es unumgänglich jene in den Versuch mit einzubeziehen. Demnach erzeugt ein Impuls am Fokuspunkt an den Lautsprecherpositionen eine Impulsantwort, die zum einen natürlich vom Ausbreitungsterm  $G(\mathbf{Y}_i, \mathbf{r}_{fp}, t)$ , jedoch auch von dem Übertragungsverhalten der Systemkomponenten abhängig ist. Somit gilt:

$$h_{i,fp}(t) = h_{AE}(t) * G(\mathbf{Y}_i, \mathbf{r}_{fp}, t) * h_{EA}(t), \quad (3.10)$$

wobei  $h_{EA}(t)$  die elektroakustische Impulsantwort der Lautsprecher, die für alle Lautsprecher als identisch betrachtet wird, und  $h_{AE}(t)$  die elektroakustische Impulsantwort des Mikrofons. Lautsprecher und Mikrofon werden dabei als verlustlos betrachtet. Aufgrund geltender Linearität ist es möglich die Impulsantwort von Lautsprecher und Mikrofon als Einheit zu betrachten. Es gilt dann

$$h_{i,fp}(t) = G(\mathbf{Y}_i, \mathbf{r}_{fp}, t) * h_S(t), \quad \text{wobei} \quad (3.11)$$

$$h_S(t) = h_{AE}(t) * h_{EA}(t), \quad (3.12)$$

die Impulsantwort des gesamten elektroakustischen Systems ist.

Die Impulsantworten  $h_{i,fp}(t)$  werden dann zeitlich umgedreht und mittels des gleichen elektroakustischen Systemes wieder zugespielt. Das Signal, das dabei an der Stelle  $\mathbf{x}$  innerhalb der Versuchsumgebung mittels eines Mikrofons<sup>2</sup> gemessen wird, entspricht

$$h_{RT}(t) = \sum_{i=1}^N G(\mathbf{Y}_i, \mathbf{x}, t) * G(\mathbf{r}_{fp}, \mathbf{Y}_i, -t) * h_S(t) * h_S(-t). \quad (3.13)$$

Am Fokussierungspunkt, also im Falle das  $\mathbf{x} = \mathbf{r}_{fp}$  und  $t = 0$ , maximiert sich die Funktion  $h_{RT}(t)$  was einer Signalfokussierung gleich kommt. Gleichung (3.13) zeigt, dass in diesem Fall der Zeitumkehrprozess sowohl für den Ausbreitungsoperator  $G(\mathbf{Y}_i, \mathbf{r}_{fp}, t)$ , als auch für das elektroakustische System  $h_S(t)$  einen spationalen wie temporalen *matched filter* darstellt [30].

Dies gilt jedoch nur in einer idealen, verlustlosen Umgebung. Die Verwendung des Zeitumkehrspiegels in der Raumakustik zieht eine Kompensation der Übertragungstrecke Fokuspunkt-Lautsprecher nach sich. So müssen die in der Wiedergabephase von den Lautsprechern abgestrahlten Signale  $y_i(t)$ , die aus einem beliebigen Signal  $x(t)$  und der Zeitumgekehrten gemessenen Impulsantwort  $h_i(-t)$  bestehen, mit dem quadratischen Betragsspektrum der zuvor ermittelten Impulsantwort kompensiert werden. Betrachtet man die abgestrahlten Signale im Frequenzbereich, ergeben sie sich zu

$$Y_i(f) = X(f) H_i^*(f) \frac{1}{|H_i(f)|^2} . \quad (3.14)$$

---

<sup>2</sup>Das Mikrofon muss das identische Übertragungsverhalten  $h_{AE}(t)$  haben

Durchlaufen diese erneut den Raum, ergibt sich am Fokuspunkt das Signal im Frequenzbereich zu

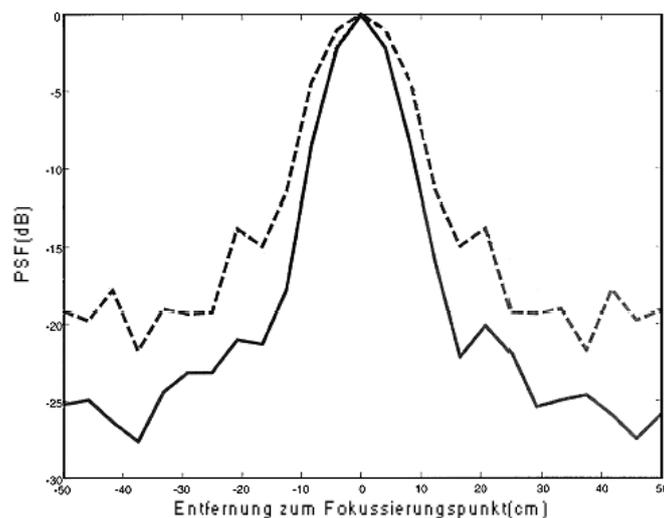
$$S_{fp,i}(f) = X(f) H_i^*(f) \frac{1}{|H_i(f)|^2} H_i(f) = X(f) \quad . \quad (3.15)$$

Bei der Division durch das Betragsspektrum ist jedoch Vorsicht geboten. So würde bei der Division von Werten in der Größenordnung von Null, in  $Y_i(f)$  eine nahezu unendlich große Frequenzüberhöhung verursacht werden. Deshalb wird hier zum Mittel der Regularisierung gegriffen. Dabei wird dem Divisor eine beliebige Konstante oder Zufallszahl addiert, die auf der einen Seite das Auftreten von Frequenzüberhöhungen verhindert, jedoch auch einen Signalfehler verursacht.

### 3.3. Eigenschaften fokussierter Schallwellen

In [30] und [24] wird der Einfluss unterschiedlicher Parameter auf die Qualität und Eigenschaft der Fokussierung untersucht.

#### 3.3.1. Spatiale Fokussierungspunktbreite (*focal spot width*)



**Abb. 3.8.:** *Point Spread Functions* aus Zeitumkehrexperiment mittels Freifeld-Simulation (gestrichelt) und reeller Versuchsanordnung aus [30].

Einen spatialen Überblick über das Schallfeld zum Zeitpunkt der Fokussierung vermitteln die *point spread functions* (PSF). Sie werden als  $d(\mathbf{x}) = \max_t [h(\mathbf{x}, t)]$  definiert. Die Fokussierungsschärfe (*focal spot width*) kann mit Hilfe der PSF bestimmt werden. Sie stellt die Breite des Hauptmaximas bei halbem Energieniveau (-6dB) dar.

In den Messungen von Yon *et al* [30] zeigt sich wie in Abbildung 3.8 erkennbar, eine klare Fokussierung durch den Prozess der Zeitumkehr. Die Überhöhungen des örtlichen Schalldrucks im Fokuspunkt beträgt ungefähr 25dB. Das Phänomen der *super-resolution* wird durch den Vergleich zu den Ergebnissen der Freifeldsimulation ebenfalls deutlich.

Weitere interessante Eigenschaften werden aus Abbildung 3.10 ersichtlich. So besteht ein deutlicher Unterschied zwischen der Fokussierungsbreite bei Zeitumkehrversuchen im Freifeld, und dem unter Bedingungen in der Raumakustik. Während sich unter Freifeld-Bedingungen die Fokussierung an dem klassische Beugungslimit der Wellenphysik (siehe Abbildung 3.9) orientiert, beträgt die Fokussierungsbreite unter Hinzunahme der Super-resolution unabhängig von der Apertur des Zeitumkehrspiegels stets die halbe Wellenlänge.

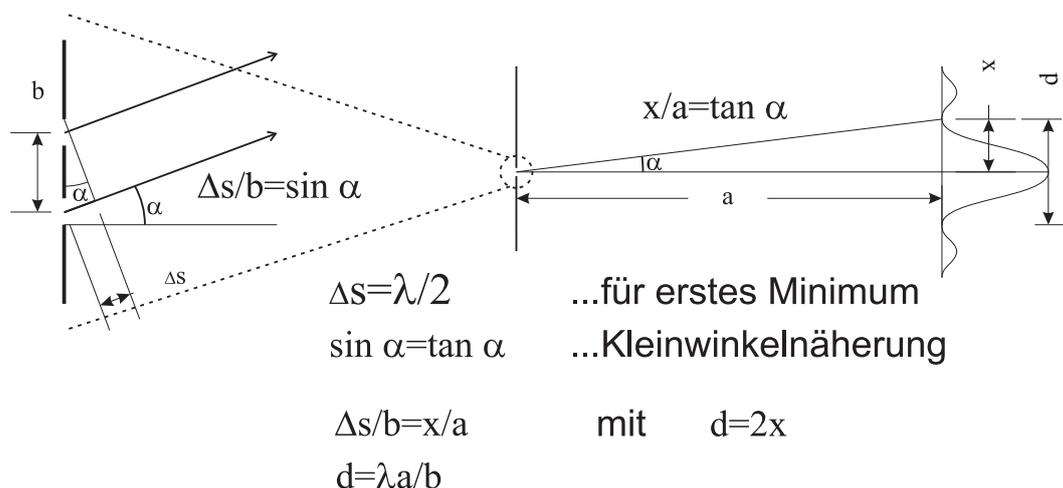


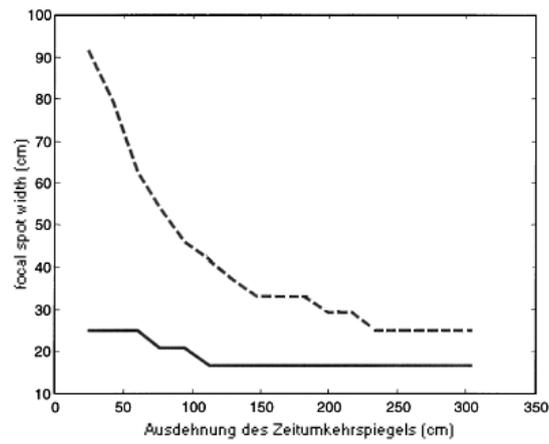
Abb. 3.9.: Beugungslimit der Wellenphysik

Ebenfalls Beleg dafür, ist das von Ribay *et al.* durch Simulation erhaltene Diagramm (Abbildung 3.11), das die zentrale Wellenlänge<sup>3</sup> eines Bandpaßrauschens der Fokussierungspunktbreite gegenüberstellt. Es ist darin deutlich die Proportionalität mit dem Faktor  $\frac{1}{2}$  zu erkennen.

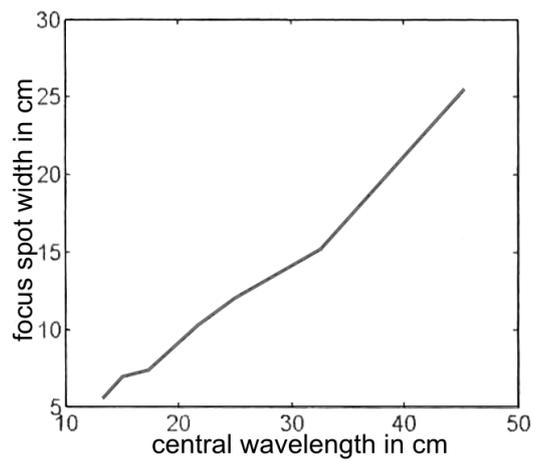
### 3.3.2. Verhältniss von Haupt- zu Nebenmaxima (*sidelobe level*)

Neben der Größe des Fokussierungspunktes, ist ebenfalls der *sidelobe level* ein wichtiger Parameter, wenn es darum geht die spatiale Fokussierungsleistung des Zeitumkehrspiegels abzuschätzen. Er stellt das logarithmische Verhältniss von Haupt- zu Nebenmaxima dar, und wird durch die Formel  $SL(dB) = 20 \log_{10}[d(y)/d(0)]$  berechnet, wobei  $d(y)$  den Wert der PSF an der Stelle des Nebenmaximas, und  $d(0)$  den Wert der PSF am Fokussierungspunkt darstellt. Yon *et al.* haben dabei festgestellt, dass das Verhältniss  $d(y)/d(0)$

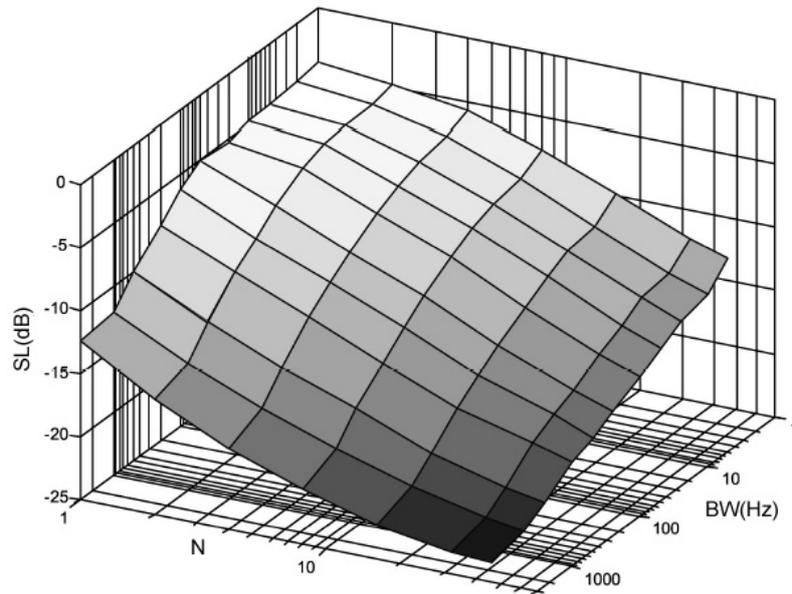
<sup>3</sup>Wellenlänge der Mittenfrequenz eines Bandpaßsignales;  $\lambda_z = \frac{2c}{f_o + f_u}$



**Abb. 3.10.:** *focal spot width* in Abhängigkeit zur Ausdehnung des Zeitumkehrspiegels aus Zeitumkehr-experiment mittels Freifeld-Simulation (gestrichelt) und reeller Versuchsanordnung aus [30].



**Abb. 3.11.:** Diagramm aus [24], dass die zentrale Wellenlänge eines fokussierten Bandpassrauschens gegenüber der Fokusbreite darstellt.



**Abb. 3.12.:** *Sidelobe level* als Funktion der Anzahl der Lautsprecher  $N$ , sowie der Testsignalbandbreite  $BW$  [30]. Die Werte stellen ein Mittel aus 32 Versuchen dar.

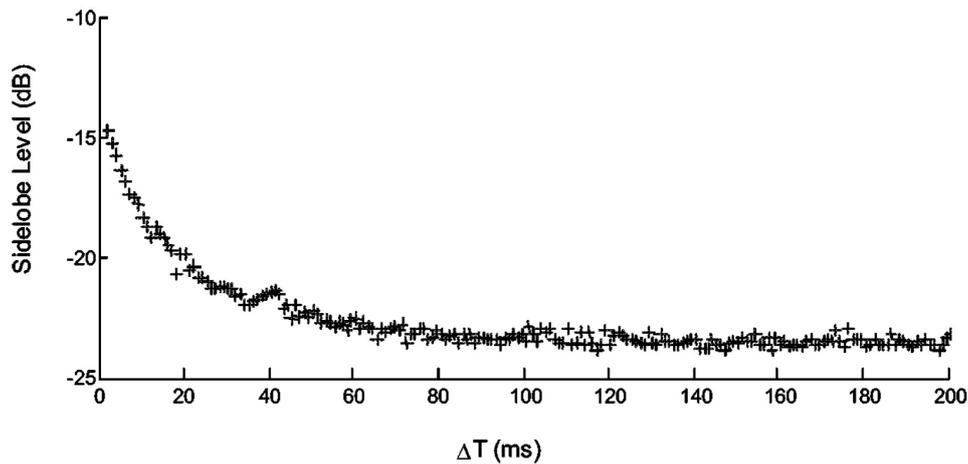
sowohl zu Wurzel der Signalbandbreite ( $\sqrt{BW}$ ) als auch zur Wurzel der Lautsprecheranzahl ( $\sqrt{N}$ ) proportional ist. Das liegt an der Tatsache, dass die Lautsprechersignale als unkorreliert betrachtet werden können und sich daher lediglich am Fokuspunkt kohärent (es addieren sich die Amplituden), überall sonst mit beliebigen Phasen, also weder rein konstruktiv noch rein destruktiv überlagern (in jenen Bereichen addieren sich die Energien der einzelnen Schallquellen). Die Abhängigkeit des *sidelobe levels* von der Bandbreite sowie der Anzahl der Lautsprecher wird durch die Näherungsgleichung

$$SL_{dB} = 10(\log(N) + \log(BW)) + C \quad \text{ausgedrückt,} \quad (3.16)$$

die eine Approximation der in Abbildung 3.12 dargestellten Funktion darstellt.

Aus Abbildung 3.12 wird erneut für den Fall von  $N = 1$  der Effekt der *super-resolution* sichtbar. Trotz der Verwendung von nur einem Lautsprecher, besteht abhängig von der Bandbreite des zu fokussierenden Signals ein minimaler Abstand zum Nebenmaxima von ca.  $4dB$ .

Um einen möglichst recheneffektiven Algorithmus bei gleichzeitig optimaler Fokussierung zu erreichen ist die zur Zeitumkehr verwendete Datenmenge, also die Länge der verwendeten Impulsantworten ein interessanter Punkt. Je länger die Impulsantworten im Aufnahmeschritt mittels des Zeitumkehrspiegels aufgezeichnet werden, desto rechenintensiver wird die Berechnung der Zeitumkehr im Wiedergabeschritt (siehe Kapitel 4). Durch die Verlängerung der Aufzeichnungsdauer werden die Raumreflexionen stärker mit einbezogen, wodurch der Zeitumkehrspiegel durch die *super-resolution* virtuell vergrößert wird.



**Abb. 3.13.:** *Sidelobe level* in Abhängigkeit der Aufnahmedauer  $\Delta T$  respektive der verwendeten Datenmenge [30].

Abbildung 3.13 zeigt den *sidelobe level* in Abhängigkeit der Dauer des Aufnahmeschritts. Man kann deutlich ein grenzwertiges Verhalten erkennen, das zeigt, dass eine an die praktischen Gegebenheiten angepasste Aufnahmedauer von hohem Nutzen ist. In Bezug auf die Verwendung in raumakustisch bezogenen Applikationen, ist dieses Verhalten nicht verwunderlich. Da jeder reale Raum Schalldämpfungen unterliegt, ist die aufzunehmende Information durch raumakustische Parameter beschränkt. Draeger *et al.* haben in [5] das grenzwertige Verhalten des  $SL^4$  in Bezug auf die Aufnahmedauer nachgewiesen. Da die zum Erreichen des  $SL$ -Grenzwertes benötigte minimale Aufnahmedauer proportional der Heisenbergzeit<sup>5</sup> des Raumes ist, wurde dieses Verhalten damit erklärt, dass nicht alle Moden der Versuchsumgebung gleichmäßig angeregt wurden. Die Versuche von Draeger *et al.* sind jedoch nicht mit unseren raumakustischen Versuchen vergleichbar. Der vorher beschriebene Grenzwert mag vielmehr mit dem Abfallen des Meßsignals unter einen im Raum vorhandenen Geräuschpegel zusammenhängen. Es scheint daher angebracht zu sein, die benötigte Aufnahmedauer mit der Nachhallzeit eines Raumes in Verbindung zu bringen.

### 3.3.3. Signal-Rauschabstand

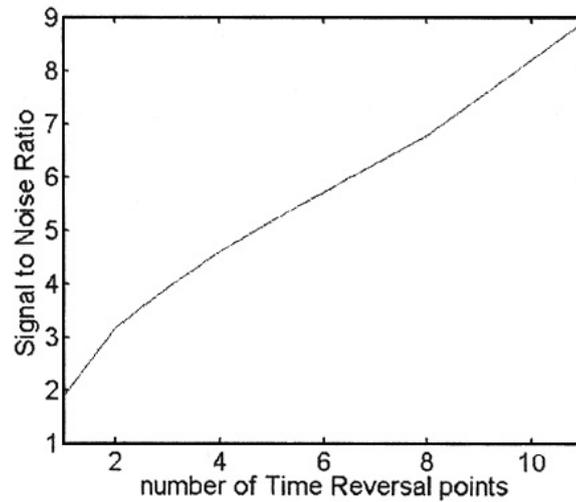
Der Signal-Rauschabstand ist das Verhältnis der maximalen Energie im Fokus, zur durchschnittlichen Energie außerhalb des Fokus.

Abbildung 3.14 zeigt eine zur Lautsprecheranzahl proportionale Verbesserung des Signal-Rauschverhaltens. Diese Gesetzmäßigkeit gilt jedoch nur für genügend dekorrelierte Lautsprecher-signale. Ebenso wie bei der Fokussierungsbreite, ergibt sich somit ebenfalls eine Frequenzabhängigkeit hinsichtlich des SNR. Abbildung 3.15 zeigt eine deutliche Verbesserung des Signal-Rauschverhältnisses bei steigender Frequenz. Der Grund

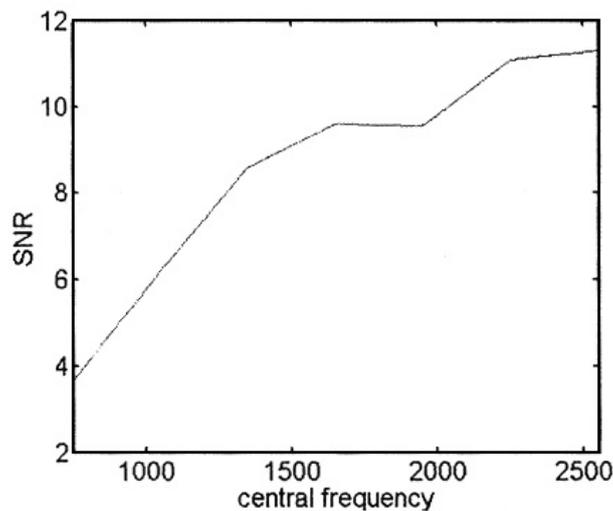
<sup>4</sup>Sidelobe Level

<sup>5</sup>Die Heisenbergzeit eines Raumes entspricht dessen inversen Modendichte [24]

dafür ist die Zunahme der Korrelation, der vom Zeitumkehrspiegel aufgenommenen und wiedergegebenen Signale, bei Wellenlängengrößen im Bereich der Abstände der Spiegelemente (Mikrofone bzw. Lautsprecher).



**Abb. 3.14.:** Signal-Rauschabstand in Abhängigkeit der Anzahl  $N$ , der zur Zeitumkehr verwendeten Lautsprecher (durch Simulation) [24].



**Abb. 3.15.:** Signal-Rauschabstand in Abhängigkeit der Mittenfrequenz eines Bandpaß-Testsignals (durch Simulation) [24].

Bestehende Untersuchungen bei der Zeitumkehr von gepulsten Signalen ([26] und [4]) und deren direkter Zusammenhang mit der Zeitumkehr von Rauschsignalen führen zu folgender, differenzierterer Berechnung des SNR für beliebige Signale [5]:

$$SNR = \begin{cases} N & , \text{ für } T_{60} \ll T_H, \\ N \frac{T_H}{T_{60}} & , \text{ für } T_H \ll T_{60}. \end{cases} \quad (3.17)$$

Wobei  $N$  erneut die Anzahl der verwendeten Lautsprecher,  $T_H$  die Heisenbergzeit des Raumes und  $T_{60}$  die Nachhallzeit des Raumes darstellen.

### 3.3.4. Temporale Fokussierung

Um die Fokussierungsqualität des Zeitumkehrspiegels beurteilen zu können, reicht es jedoch nicht lediglich die spatialen Eigenschaften der Fokussierung zu betrachten. Temporale Aspekte wie Impulstreue spielen ebenfalls eine wichtige Rolle, wenn es um die korrekte Darstellung virtueller Schallquellen geht.

Um dies beurteilen zu können, wurde der Zeitumkehrprozess für einen im Raum generierten Impuls durchgeführt. Die zeitumgekehrten Impulsantworten wurden von den einzelnen Lautsprechern wiedergegeben und überlagerten sich im Fokussierungspunkt. In Abbildung 3.17 ist der normierte, temporale Verlauf der Schallenergie im Fokus aufgetragen. Im Vergleich zur Fokussierung mittels Zeitumkehr wurde ebenfalls die Fokussierung mittels *delay-law*<sup>6</sup>

Wie unschwer zu erkennen ist, wird der ursprünglich generierte Impuls mittels Zeitumkehr im Fokus deutlicher und getreuer wiedergegeben, als das der Fall bei der *delay-law focussing* Technik der Fall ist.

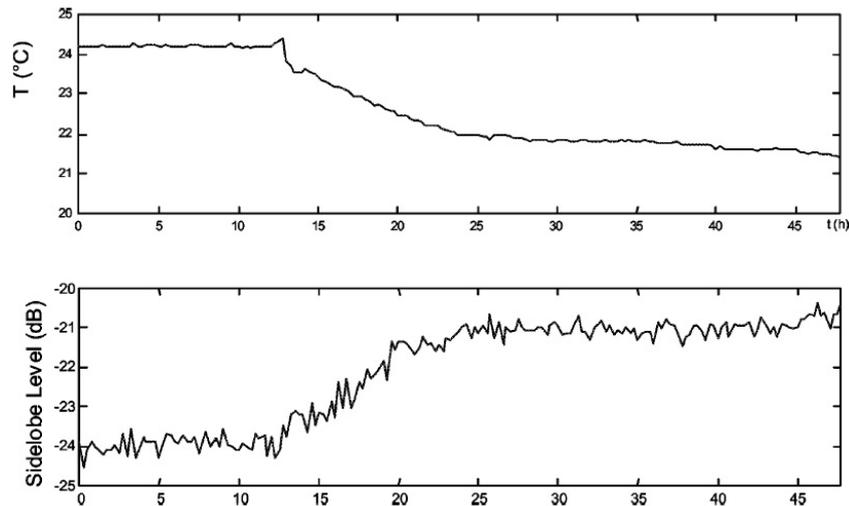
Ein wesentlicher Unterschied besteht jedoch in der zeitlichen Verteilung der fokussierten Signale. Während der Zeitumkehrspiegel den zeitlichen Signal-Rauschabstand durch eine symmetrische Verteilung (Vor- und Nachechos) optimiert, treten bei der *Delay-law*-Technik nur Nachechos auf, die jedoch wesentlich intensitätsreicher sind. Trotz des höheren Signal-Rauschabstandes stellt das Vorhandensein von Vorechos jedoch ein Problem bei der Benutzung von Audio-Signalen dar. Insbesondere perkussive Klänge und Plosive leiden unter der „Verschmierung“ der Vorechos. Die Nachechos der *Delay-law*-Technik klingen trotz ihrer wesentlich höheren Intensität nicht unnatürlich, sondern werden vielmehr als Hall empfunden.

Um die störenden Vorechos des Zeitumkehrspiegels zu kaschieren, wäre die Hinzunahme von maskierendem Rauschen eine Möglichkeit. Aufgrund des ohnehin großen Signal-Rauschabstandes könnte der Maskierer in seiner Intensität relativ gering gehalten werden, ohne seine Wirkung zu verfehlen. Eine weitere Möglichkeit wäre die von der Hörerposition<sup>7</sup> abhängige Filterung der zeitumgekehrten Impulsantwort. Dem Hörer naheliegende Lautsprechergruppen würden in diesem Fall die Vorechos ausblenden und so eine perzeptive Verbesserung bewirken [25].

---

<sup>6</sup>Die *delay-law focussing* Methode verwendet im Gegensatz zur Zeitumkehr keine zeitumgekehrten Impulsantworten als Pfadinformation, sondern lediglich Signalverzögerungen die dem Abstand von Lautsprecher zu Fokussierungspunkt entsprechen. Dadurch entfällt u.a. der Effekt der *super resolution* abgebildet.

<sup>7</sup>Die Hörerposition könnte mittels eines Headtracking Systems dynamisch ermittelt werden.



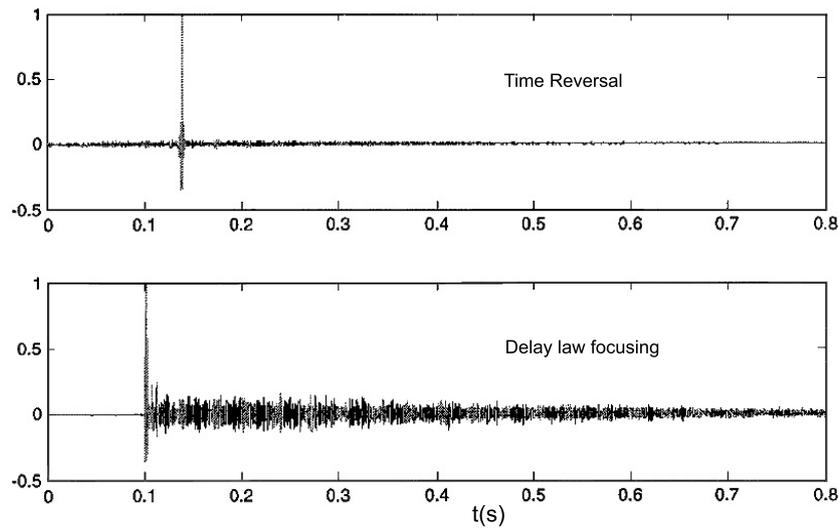
**Abb. 3.16.:** Veränderung des *Sidelobe Levels* über eine Versuchsdauer von 48 Stunden (unten) und die dazugehörige Temperaturentwicklung (oben) [30].

### 3.3.5. Zeitvariante Veränderungen

In der Praxis ist die Stabilität des Zeitumkehrspiegels hinsichtlich seiner Fokussierungseigenschaften ein wichtiger Punkt. Eine raumakustische Applikation muss auch im Falle einer sich verändernden Umgebung, wie zum Beispiel sich bewegenden Menschen gut funktionieren. Der Einfluß solcher zeitvarianter Veränderungen wurde von Yon *et al.* in [30] untersucht. Dabei wurden zu Beginn des Experiments vom Zeitumkehrspiegel ein Set von Signalen aufgezeichnet, zeitlich umgekehrt, und alle 15 Minuten von den entsprechenden Lautsprechern wiedergegeben. Während der Versuchsdauer von 48 Stunden arbeiteten und bewegten sich Leute innerhalb des Versuchsraumes, und veränderten dadurch geringfügig das Ausbreitungsmedium. Bei konstanter Temperatur blieb wie in Abbildung 3.16 zu erkennen ist die Fokussierungsqualität des Zeitumkehrspiegels (hier mittels des *Sidelobe Levels* gemessen) sehr stabil. Lediglich starke Veränderungen des Ausbreitungsmediums, die in diesem Versuch mittels eines Temperaturabfalls<sup>8</sup> simuliert wurden wirken sich negativ auf die Qualität der Fokussierung aus. Eine Möglichkeit diesem Problem aus dem Weg zu gehen, wäre die Erstellung verschiedener, den unterschiedlichen Ausbreitungsbedingungen entsprechenden Signal-Sets, die bei Veränderungen der Raumparameter wie Temperatur oder Luftfeuchtigkeit, dementsprechend Verwendung finden.

In Tabelle 3.3.5 sind noch einmal die wichtigsten Fokussierungseigenschaften des Zeitumkehrspiegels und deren Abhängigkeit zu den Applikationsparametern zusammengefasst.

<sup>8</sup>was eine Veränderung der Schallgeschwindigkeit zur Folge hat



**Abb. 3.17.:** Zeitliche Betrachtung des Fokussierungssignals für *delay-law focussing* (unten) und Fokussierung mittels Zeitumkehr (oben) [30].

Fokussierungseig.		Applikationsparam.		Abhängigkeit	
SNR	SignalRauschabst.	N	Anz. Lautsprecher	$N \nearrow \rightarrow$	SNR $\nearrow$
	<i>Signal Noise Ratio</i>	f	Frequenz	$f \nearrow \rightarrow$	SNR $\nearrow$
FSW	Fokussierungsbreite	f	Frequenz	$f \nearrow \rightarrow$	FSW $\searrow$
	<i>Focal Spot Width</i>	d	Breite des Zeitumk.spiegels	$d \nearrow \rightarrow$	FSW $\searrow$
SL	Nebenmaxima	N	Anz. Lautsprecher	$N \nearrow \rightarrow$	SL $\searrow$
		BW	Bandbreite des Signals	$BW \nearrow \rightarrow$	SL $\searrow$
		$\Delta T$	Aufnahmedauer	$\Delta T \nearrow \rightarrow$	SL $\searrow$

**Tab. 3.1.:** Übersicht über die Eigenschaften und Parameter des Zeitumkehrspiegels

## 4. Signalverarbeitung

Das am Ende des Kapitels 3 beschriebene Prinzip der Schallfokussierung ist jedoch in seiner Anwendung nicht echtzeitkompatibel. Desweiteren setzt es zeitlich beschränkte Eingangssignale voraus, die in ihrer Länge vom vorhandenen Wiedergabespeicher des Wiedergabesystems abhängen. Für viele Anwendungen sind diese Einschränkungen jedoch nicht tragbar, und bedürfen einer anderweitigen Realisation des Zeitumkehrspiegels. Mit den Mitteln der Signalverarbeitung ist es dank gesteigerter Prozessorleistung moderner Computersysteme heutzutage möglich, echtzeitfähige Applikationen zu realisieren, die selbst den hohen Ansprüchen in Bezug auf die Anzahl der Wiedergabekanäle gerecht werden.

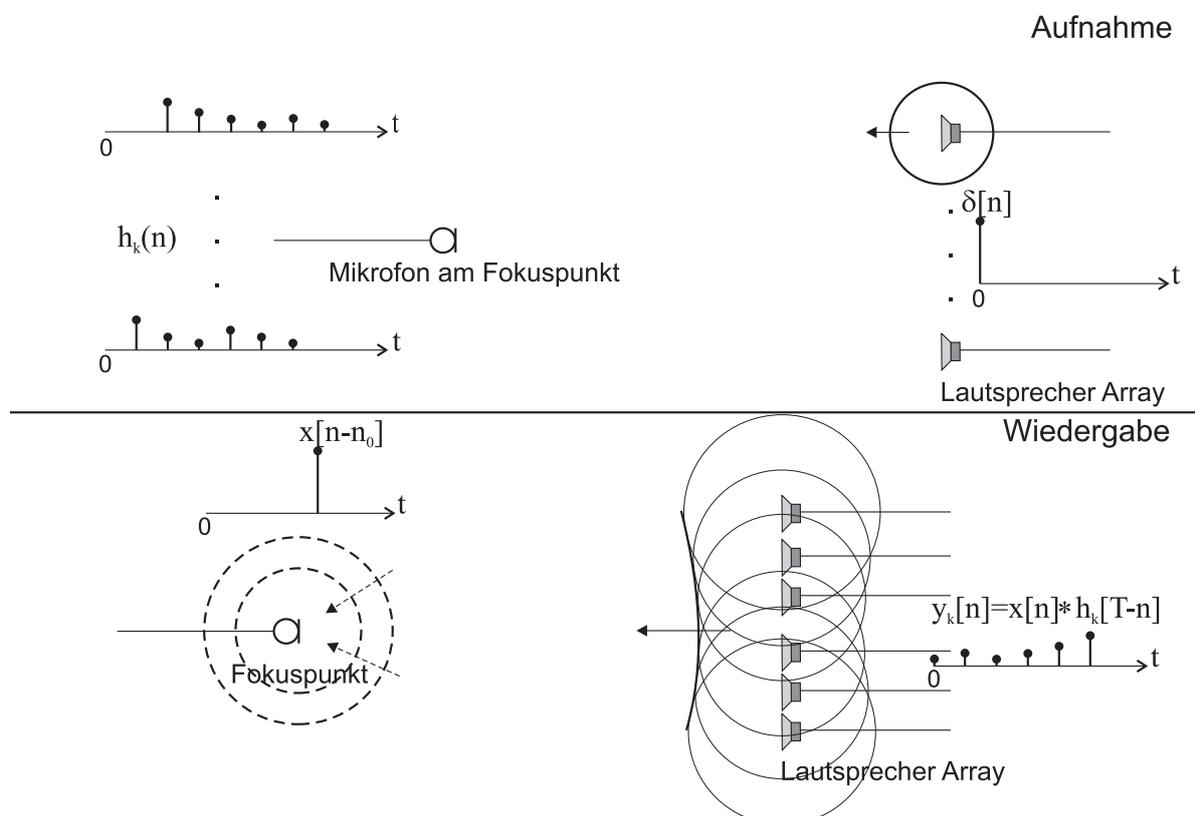


Abb. 4.1.: Prinzip der Zeitumkehr unter Verwendung einer Faltung

Gemäß Kapitel 3 erfolgt die Schallfokussierung aus zwei Schritten (siehe Abbildung 4.1).

Im ersten Schritt wird ein Impuls  $\delta[n]$  nacheinander von den Lautsprechern des Lautsprecherarrays wiedergegeben und an der Stelle im Raum, an der sich später der Schall fokussieren soll, mittels eines Mikrofons die entsprechenden Impulsantworten  $h_k[n]$  aufgenommen<sup>1</sup>. Nun kann die zeitinverse Impulsantwort  $h_k[T - n]$  berechnet und mit dem zu fokussierende Eingangssignal  $x[n]$  gefaltet werden. Dieser Berechnungsprozess muss natürlich für jeden Wiedergabekanal erfolgen und führt zu einem Set von Ausgangssignalen  $y_k(n)$ . Durch zeitsynchrones abspielen von  $y_k(n)$  wird  $x[n]$  deutlich hörbar im Fokuspunkt fokussiert.

Im folgenden werden verschiedene Möglichkeiten zur Realisation der Faltung gezeigt und hinsichtlich der Verwendung für Echtzeitumgebungen beurteilt.

## 4.1. Faltung mittels FIR-Filter

Die Faltung zweier Folgen wird meist durch

$$y[n] = x[n] * h[n] \quad (4.1)$$

dargestellt, wobei dies lediglich die Kurzform der Faltungssumme (wie erkennbar handelt es sich um eine kommutative Operation)

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \quad (4.2)$$

ist.

Für eine zeitlich begrenzte Impulsantwort der Länge  $N_h$  nimmt die lineare Faltungssumme andere Grenzen an:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N_h-1} x[k]h[n-k] = \sum_{k=0}^{N_h-1} h[k]x[n-k] \quad (4.3)$$

Die in (4.3) dargestellte Faltungssumme wird als *direkte Form* bezeichnet und kann unmittelbar mittels eines FIR<sup>2</sup>-Filters implementiert werden, der mit Hilfe einer Kette von Verzögerungselementen, Addier- und Multiplikationselementen realisiert wird. Das so gefaltete Signal  $y(n)$  liegt latenzfrei mit der Länge  $N_h + N_x - 1$  am Ausgang an.

Die Berechnung von Faltungen ist vor allem in ihrer direkten Form eine sehr rechenintensive Angelegenheit. Da die Anzahl der Rechenoperation quadratisch mit der Länge der zu faltenden Signale zunimmt, stößt man bei dieser Art der Faltungsberechnung

<sup>1</sup>Dieser Vereinfachung liegt die in Kapitel 3.2.2 beschriebene Tatsache zu Grunde, dass in der Akustik Quelle und Senke vertauscht werden können, ohne dass sich die akustischen Eigenschaften des Ausbreitungspfades ändern.

<sup>2</sup>FIR=Finite Impuls Response (endliche Impulsantwort)

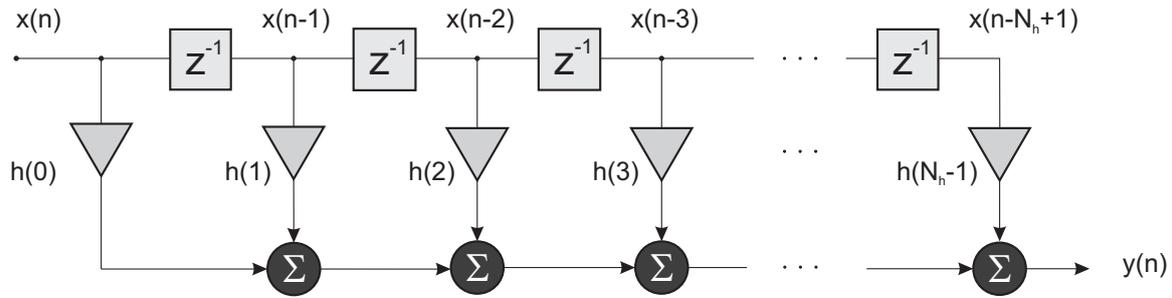


Abb. 4.2.: Realisation einer Faltung mittels eines FIR-Filters

selbst bei modernen Computersystemen schnell an die Grenzen. So benötigt man für eine Faltung eines 3 Sekunden langen Audiosignales (mono; 44,1Khz  $f_s$ ) mit einer ebenso langen Impulsantwort die ungefähre Zahl von 70 Milliarden Rechenoperationen<sup>3</sup>.

## 4.2. Die schnelle Faltung

Wesentlich recheneffizienter sind im Frequenzbereich realisierte Faltungen. Da eine Faltung zweier Signale im Zeitbereich einer Multiplikation im Frequenzbereich entspricht, ist es jedoch nötig die Signale zunächst mittels einer *Fouriertransformation* in den Frequenzbereich zu transformieren. Weil es sich hier ausschließlich um Signale in digitaler Form handelt und diese nichts anderes als diskrete Folgen sind, wird hierfür die *diskrete Fouriertransformation*<sup>4</sup> verwendet. Letztendlich müssen die im Zeitbereich multiplizierten Signale wieder mittels einer inversen DFT in den Zeitbereich rücktransformiert werden. Da das Eingangssignal  $x[n]$  vor der DFT jedoch komplett vorliegen müssen, ist mit einer Verzögerung von  $N_x$  Samples zu rechnen.

Bei einer sogenannten *schnellen Faltung* müssen jedoch einige Dinge beachtet werden. Um zu gewährleisten, dass es sich bei der Faltung um eine lineare Faltung handelt, ist es notwendig  $x[n]$  und  $h[n]$  vor der DFT mittels Einfügen von Nullwerten auf die Länge  $N_x + N_h - 1$  zu erweitern (*zeropadding*). Wird dies nicht gemacht, entsteht anstelle der linearen Faltung eine zirkulare Faltung.

Wenn dieser Weg auf den ersten Blick vielleicht umständlich erscheint, so ist er jedoch wesentlich recheneffizienter als die direkte Faltung im Zeitbereich mittels eines FIR-Filters. Für ein gegebenes Eingangssignal der Länge  $N_x$  werden  $2(N_x + N_h - 1) \cdot \log_2(N_x + N_h - 1)$  Rechenoperationen für die FFTs<sup>5</sup>,  $2(N_x + N_h - 1)$  Operationen für die komplexe Multiplikation von  $X(k)$  und  $H(k)$ , und weitere  $(N_x + N_h - 1) \cdot \log_2(N_x + N_h - 1)$  Operationen für die inverse FFT benötigt.

<sup>3</sup> $(N_x + N_h - 1) \cdot (2N_h - 1)$

<sup>4</sup>DFT=Diskrete Fouriertransformation; IDFT=Inverse Diskrete Fouriertransformation

<sup>5</sup>FFT=Fast Fourier Transformation; eine mittels Zerlegungsalgorithmen effektiverer Berechnungsform der DFT

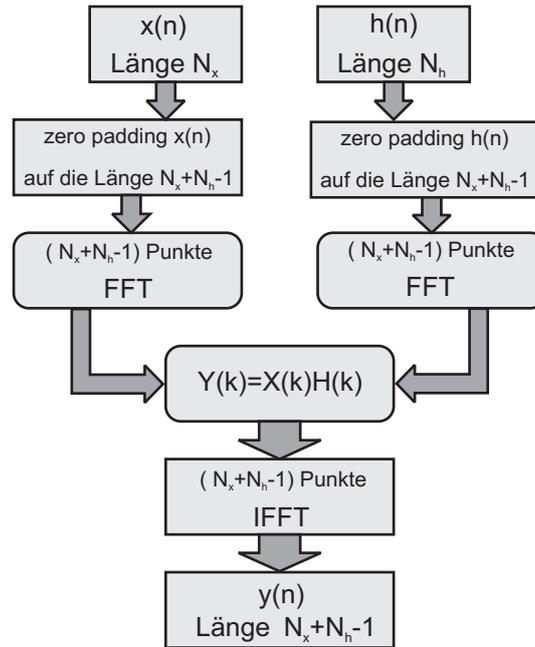


Abb. 4.3.: Blockdiagramm der *schnellen Faltung* mittels FFT und IFFT

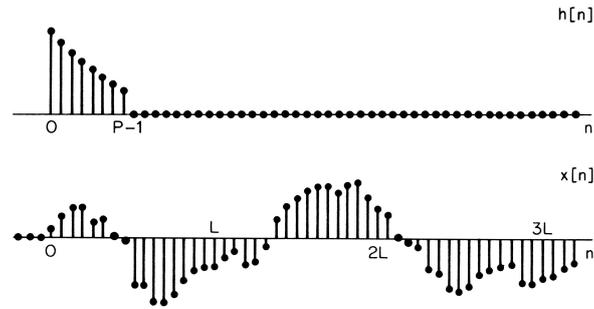
Auf unser voriges Audiobeispiel (3s; 44.1kHz; mono) angewendet, entspricht das einer Anzahl von knapp 15 Millionen Operationen, die im Vergleich zu den 70Milliarden Operationen des FIR-Filters als beinahe wenig erscheinen.

### 4.3. Blockfaltungsmethoden

Die schnelle Faltung ist jedoch auf Anwendungen limitiert, in denen  $x[n]$  von endlicher Länge und komplett bestimmt ist. Aufgrund der benötigten Längen Anpassung ist es ebenfalls unpraktisch wenn  $x[n]$  wesentlich größer als  $h[n]$  ist. Es gibt jedoch andere Methoden, die es erlauben die Faltung in aufeinanderfolgenden Blöcken zu berechnen. Dadurch ist es möglich sehr lange und in ihrer Dauer unbestimmte Eingangssignale mit einer endlichen Impulsantwort ohne allzugroße Latenzen zu falten. Diese Faltungsmethoden werden Blockfaltungsmethoden genannt.

Dabei wird das zu filternde Signal  $x[n]$  in Segmente der Länge  $L$  aufgeteilt. Jedes Segment kann dann mit einer endlichen Impulsantwort  $h[n]$  gefaltet und wieder in einer passenden Art und Weise zusammengesetzt werden. Die lineare Faltung jedes einzelnen Blocks kann so mit der DFT oder FFT realisiert werden.

Um dieses Verfahren zu veranschaulichen betrachten wir eine Impulsantwort  $h[n]$  der Länge  $P$  und ein Eingangssignal  $x[n]$ , welches in Abbildung 4.4 dargestellt ist. Im folgenden gehen wir davon aus, dass  $x[n] = 0$  für  $n \leq 0$  und dass die Länge von  $x[n]$  viel



**Abb. 4.4.:** Die endliche Impulsantwort  $h[n]$  und das zu filternde Eingangssignal  $x[n]$  mit unbestimmter Länge. [1]

größer als  $P$  ist. Die Folge  $x[n]$  kann auch als Summe von verschobenen Segmenten der Länge  $L$  dargestellt werden, d.h.

$$x[n] = \sum_{r=0}^{\infty} x_r[n - rL], \quad (4.4)$$

wobei gilt

$$x_r[n] = \begin{cases} x[n + rL] & 0 \leq n \leq L - 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.5)$$

Abbildung 4.5(a) illustriert die Segmentierung von  $x[n]$  aus Abbildung 4.4. Man beachte, dass die Numerierung innerhalb jedes Segmentes beim ersten Abtastwert mit  $n = 0$  beginnt; der nullte Abtastwert von  $x_r[n]$  entspricht jedoch dem  $rL$ -ten Wert der Eingangsfolge  $x[n]$ . Dies wird durch die verschobene Position der Segmente ausgedrückt.

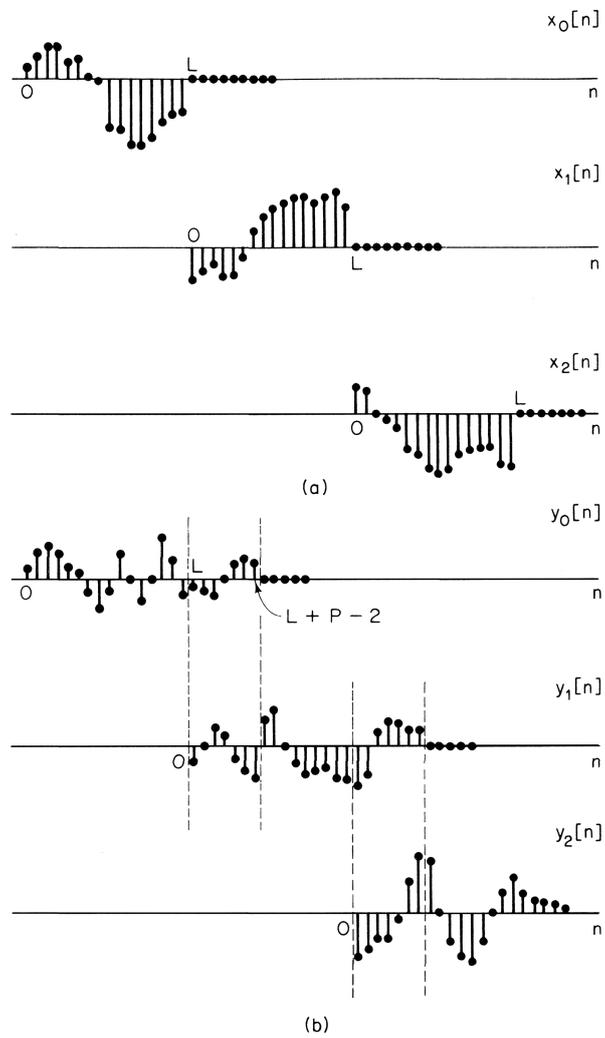
Da die Faltung eine lineare zeitinvariante Operation ist, gilt

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{r=0}^{\infty} y_r[n - rL], \quad (4.6)$$

wobei

$$y_r[n] = x_r[n] * h[n]. \quad (4.7)$$

Nachdem die Folgen  $x_r[n]$  nur aus  $L$  nicht verschwindenden Werten bestehen und  $h[n]$  die Länge  $P$  besitzt, wird jeder Ausdruck  $y_r[n] = x_r * h$  gerade  $(L + P - 1)$  Abtastwerte lang sein. Somit kann die lineare Faltung  $x_r[n] * h[n]$  über die oben beschriebene Methode mit  $N$ -Punkte DFTs berechnet werden, wobei  $N \geq L + P - 1$  ist. Da zwischen jeweils zwei Eingangssegmenten  $L$  Abtastwerte liegen, aber jedes gefilterte Segment die Länge



**Abb. 4.5.:** (a) Zerlegung von  $x[n]$  in nicht überlappende Segmente der Länge  $L$ . (b) Ergebnis der Faltung aller mit  $h[n]$ . [1]

$(L + P - 1)$  besitzt, werden sich  $(P - 1)$  nicht verschwindende Werte überlappen. Diese überlappenden Werte müssen bei der Ausführung der Summation, die in Gleichung (4.6) verlangt wird, zusammengefaßt werden. Dies veranschaulicht Abbildung 4.5(b), welches die gefalteten Segmente  $y_r[n] = x_r[n] * h[n]$  zeigt. Genauso, wie das Eingangssignal durch die Addition der verschobenen Teilsignale in Abbildung 4.4(a) zurückgewonnen wird, bestimmt man das Ausgangssignal nun durch die Addition der verschobenen gefalteten Segmente, wie in Abbildung 4.4(b) dargestellt. Diese Faltungsmethode wird *overlap add* Methode genannt, weil sich die gefalteten Segmente überlappen und zur Bestimmung des Ausgangssignals addiert werden. Die Überlappung entsteht, weil die lineare Faltung jedes Segmentes mit der Impulsantwort im allgemeinen länger als das Segment selbst ist [1].

Eine alternative Blockfaltungsmethode, stellt die *overlap save* Methode dar. Sie geht von der Implementierung einer  $L$ -Punkte zirkularen Faltung einer Impulsantwort  $h[n]$  der Länge  $P$  mit einem Segment  $x_r[n]$  der Länge  $L$  aus und identifiziert den Teil der zirkularen Faltung, der mit der linearen Faltung übereinstimmt. Die resultierenden Ausgangssegmente werden dann zur Bestimmung der Ausgangsfolge *aneinander* gesetzt. Wenn eine Folge der Länge  $L$  mit einer  $P$ -Punkte Folge ( $P \leq L$ ) zirkular gefaltet wird, werden die ersten  $(P - 1)$  Werte des Ergebnisses nicht korrekt sein, während die verbleibenden Werte mit denen, die man über eine lineare Faltung erhalten hätte, identisch sind. Deshalb wird  $x[n]$  so in Segmente der Länge  $L$  geteilt, dass jedes Eingangssegment das vorhergehende Segment gerade um diese  $(P - 1)$  Werte überlappt. Damit werden die Segmente  $x_r[n]$  definiert als

$$x_r[n] = x[n + r(L - P + 1) - P + 1] \quad 0 \leq n \leq L - 1, \quad (4.8)$$

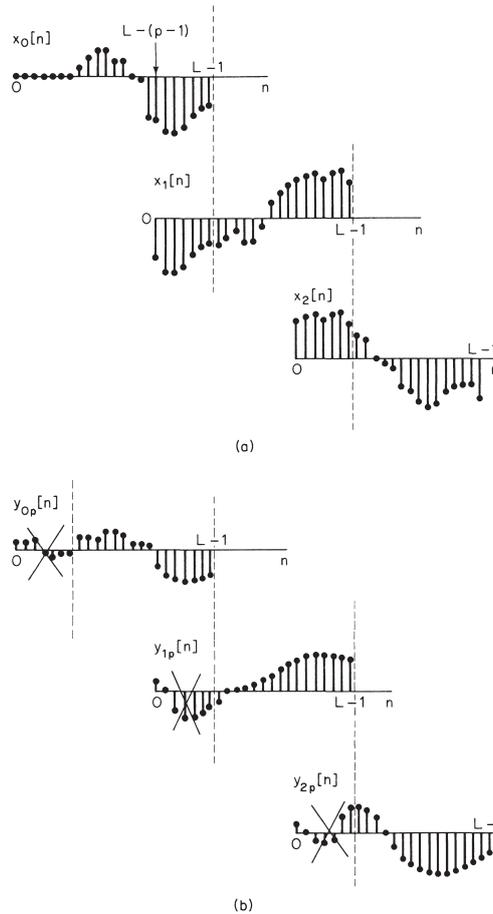
wobei der zeitliche Ursprung jedes Segmentes, wie zuvor, so definiert ist, dass er bei jedem Segment neu beginnt anstatt an dem Ursprung der Eingangsfolge  $x[n]$  festzuhalten. Diese Segmentierungsmethode wird in Abbildung 4.6(a) dargestellt. Die zirkulare Faltung jedes Segmentes mit  $h[n]$  wird als  $y_{rp}[n]$  bezeichnet; der zusätzliche Index  $p$  zeigt an, dass  $y_{rp}[n]$  das Ergebnis einer zirkularen Faltung ist. Diese Folgen sind in Abbildung 4.6(b) zu sehen. Bei allen so gefalteten Segmenten liegt der zu vernachlässigende Teil im Intervall von  $0 \leq n \leq P - 2$ . Die verbleibenden Werte der aufeinanderfolgenden Segmente werden dann aneinandergereiht, um die endgültige, gefilterte Ausgangsfolge zu erzeugen. Damit gilt

$$y[n] = \sum_{r=0}^{\infty} y_r[n - r(L - P + 1) + P - 1], \quad (4.9)$$

mit

$$y_r[n] = \begin{cases} y_{rp}[n] & P - 1 \leq n \leq L - 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.10)$$

Dieses Verfahren wird ebenfalls als *überlappende Bindungsmethode* bezeichnet, weil sich die Eingangssegmente so überlappen, dass jedes nachfolgende Segment aus  $L - P + 1$  neuen Werten und  $(P - 1)$  gespeicherten Werten des vorhergehenden Segmentes besteht [1].



**Abb. 4.6.:** (a) Zerlegung von  $x[n]$  aus Abbildung 4.4 in überlappende Segmente der Länge  $L$ . (b) Ergebnis der Faltung jedes Segments mit  $h[n]$ . Die Anteile der gefilterten Segmente, die zur Abbildung der linearen Faltung verworfen werden müssen, wurden gekennzeichnet. [1]

## 4.4. Partitionierung der Impulsantwort

Mittels der *overlap save* oder der *overlap add* Methode ist es möglich Impulsantworten in Echtzeit, also mit Eingangssignalen von unbestimmter Dauer zu falten. Je nach Länge der Impulsantwort ist jedoch mit einer Latenz von der Dauer der Impulsantwort zu rechnen. In raumakustischen Echtzeit-Applikationen kann dies zu Problemen führen, da Impulsantworten von mehr als einer Sekunde nicht unüblich sind. Eine Möglichkeit die Latenz unter solchen Voraussetzungen in einem für Echtzeit-Applikationen angemessenen Rahmen zu halten, stellt die Unterteilung der Impulsantwort in mehrere Blöcke dar.

Dies ist aufgrund der Linearität der Faltung problemlos möglich. Dabei unterscheidet man zwischen uniformer Teilung der Impulsantwort in Teile gleicher Größe, sowie der nicht uniformen Teilung in ungleiche Blockgrößen.

#### 4.4.1. Uniforme Teilung der Impulsantwort - Multi Delay Filter

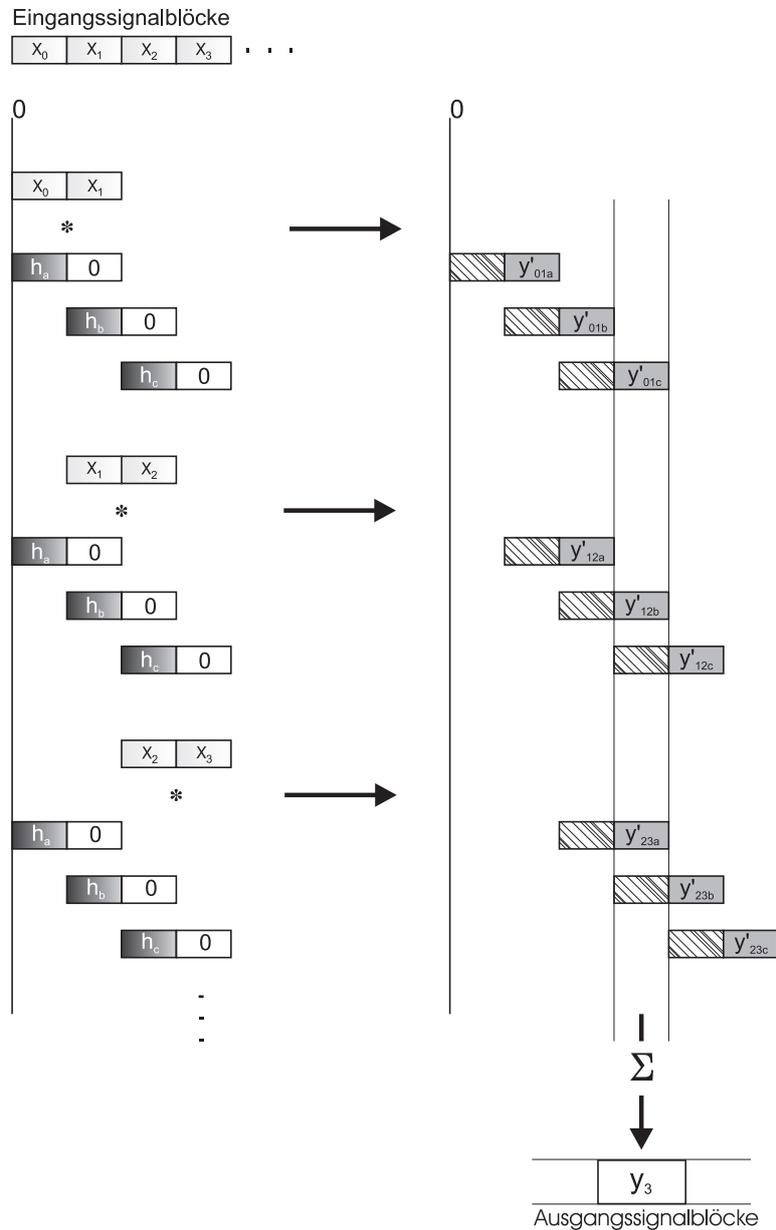


Abb. 4.7.: Blockfaltung und Zusammensetzung des Ausgangssignals [7]

Bei der im Rahmen dieser Diplomarbeit erstellten Applikation wurde diese Art der Faltung implementiert. Da die Echtzeitentwicklungsumgebung *Pure Data* die Verwendung

ungleicher Blockgrößen erschwert, sowie die Applikation zunächst prinzipiell ein reines Wiedergabesystem darstellt, schien der Schritt zur Null-Latenz-Lösung nicht unbedingt notwendig zu sein.

Abbildung 4.7 zeigt schematisch die Funktionsweise eines Multi-Delay-Filters. Die Impulsantwort wird in diesem Beispiel in drei Audioblöcke der Länge  $K = 3$  zerteilt, die die gleiche Größe haben wie die Eingangsblöcke. Für die Verarbeitung werden jedoch jeweils zwei Eingangsblöcke mit einem Impulsantwortblock, der um eine Blocklänge mittels Zero-Padding gestreckt wird, gefaltet.

Die linke Seite zeigt die zu verarbeitenden Blöcke mit ihrem zeitlichen Bezug als schwarze Nulllinie. Die rechte Seite zeigt die Faltungsergebnisse aus den 3 mal 3 Faltungen mit ihrem zeitlichen Bezug. Die dargestellte Momentaufnahme zeigt die Berechnungsphase des Ausgangsblocks  $y_3$  aus den Zwischenblöcken  $y'_{01c}$ ,  $y'_{12b}$  und  $y'_{23a}$ . Es wird deutlich, dass jeweils der aktuelle Eingangsblock, sowie  $K$  vorherige Eingangsblöcke gepuffert werden müssen. Der oben links dargestellte Blockpuffer entspricht also einem FIFO-Puffer, der von rechts gefüllt wird. Die eigentlichen Faltungsoperationen werden wieder als schnelle Faltung ausgeführt.

Für die mathematische Darstellung des Multi-Delay-Algorithmus werden die Audioblöcke als Vektoren repräsentiert. Die Gleichungen (4.11) und (4.12) verdeutlichen, wie die für die schnelle Faltung benötigten Fouriertransformationen der Eingangsblöcke und Impulsantwortblöcke gebildet werden.

Dabei werden die Werte der Eingangsblöcke als Vektoren  $\mathbf{x}'_m$  der Länge  $N$  dargestellt, der Index  $m$  bezieht sich auf die Blocknummer. Die Zwischenblöcke, repräsentiert durch die Vektoren  $\mathbf{x}_m$ , werden aus zwei Eingangsvektoren zusammengesetzt und haben somit die Länge  $2N$ . Der Vektor  $\mathbf{X}_m$  bezeichnet das Ergebnis der FFT.

$$\mathbf{x}_m = \begin{pmatrix} \mathbf{x}'_{m-1} \\ \mathbf{x}'_m \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{FFT}} \mathbf{X}_m \quad (4.11)$$

Die Impulsantwort wird in  $K$  Vektoren  $\mathbf{h}'_k$  der Länge  $N$  zerlegt, wobei die Länge der Impulsantwort  $L$  ein Vielfaches der Blocklänge  $N$  sein muss.  $\mathbf{Z}$  bezeichnet einen Nullvektor der Länge  $N$ , der an  $\mathbf{h}'_k$  angehängen wird, um den Vektor  $\mathbf{h}_k$  der Länge  $2N$  zu bilden (*zeropadding*). Der Vektor  $\mathbf{H}_k$  bezeichnet das Ergebnis der FFT.

$$\mathbf{h}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{h}'_k \\ \mathbf{Z} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{FFT}} \mathbf{H}_k \quad (4.12)$$

Die Gewinnung des Ausgangsblocks und somit den Kern der Signalverarbeitung zeigt Gleichung (4.13).

$$\mathbf{Y}_m = \sum_{k=0}^{K-1} \mathbf{H}_k \cdot * \mathbf{X}_{m-k} \xrightarrow{\text{IFFT}} \mathbf{y}_m \quad (4.13)$$

Hierbei bezeichnet  $*$  die elementweise Multiplikation der Vektoren  $\mathbf{H}_k$  und  $\mathbf{X}_{m-k}$ . Über Gleichung (4.13) erhält man schließlich  $\mathbf{Y}_m$  über die IFFT den gefilterte Ausgangsvektor  $\mathbf{y}_m$ .

Bei einer unveränderlichen Impulsantwort ist es möglich die Fouriertransformationen der Impulsantwortvektoren  $\mathbf{H}_k$  einmalig offline zu berechnen, und für die ständige Verwendung in einem Blockdepot zu speichern. Mathematisch lässt sich dieses Depot als eine Matrix  $H$  darstellen, deren Spalten aus den einzelnen Fouriertransformationen der Impulsantwortvektoren bestehen (siehe Gleichung (4.14)).

$$H = (\mathbf{H}_{k-K+1} \quad \cdots \quad \mathbf{H}_{k-1} \quad \mathbf{H}_k) \quad (4.14)$$

Da die Fouriertransformation  $\mathbf{X}_m$  jedes Eingangszwischenvektors  $\mathbf{x}_m$  für  $K$  zu berechnende Ausgangsvektoren benötigt wird, ist es auch hier effizienter die einmal angefertigte Fouriertransformation in einem *FIFO*<sup>6</sup>-Blockdepot zu speichern, um sie nicht für jeden Block neu berechnen zu müssen. Auch dieses *FIFO*-Blockdepot lässt sich mathematisch als eine Matrix  $X$  dargestellt, deren Spalten aus den einzelnen fouriertransformierten Eingangszwischenvektoren bestehen (siehe Gleichung (4.15)).

$$X_m = (\mathbf{X}_{m-K+1} \quad \cdots \quad \mathbf{X}_{m-1} \quad \mathbf{X}_m) \quad (4.15)$$

Besonders hervorzuheben ist, dass die Multi-Delay-Filterung aufgrund der hoch entwickelten FFT-Algorithmen sehr effizient zu implementieren ist, obwohl von den Zwischenergebnissen der schnellen Faltungen jeweils nur eine Hälfte verwendet wird [7].

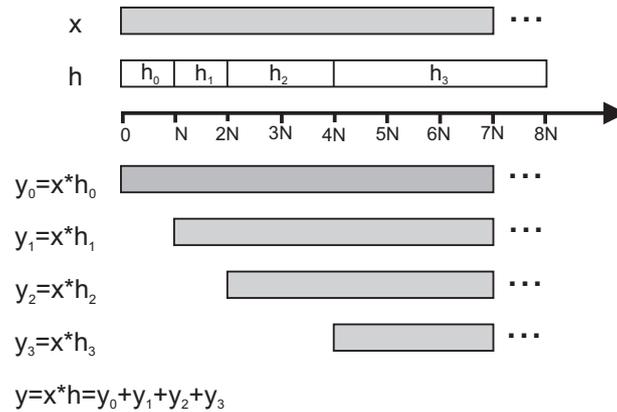
#### 4.4.2. Nicht uniforme Teilung der Impulsantwort - die Gardner Faltung

*William G. Gardner* schlug in [10] eine Null-Latenz Lösung vor, die sich sowohl der schnellen Faltung in Blöcken, als auch der Faltung mittels FIR-Filters bedient. Um sich der DFT mittels FFT-Algorithmen zu bedienen, empfiehlt es sich Blöcke von der Größe  $2^n$  zu wählen. Für kleine Filtergrößen ist es effizienter die Faltung mit der direkten Form (FIR) durchzuführen, als mit der Blockfaltung. Man sollte die kleinste Blockgröße  $N$  demnach so wählen, dass gerade die Blockfaltung effizienter als ein FIR-Filter der Länge  $N$  ist. Für typische DSPs ist das eine Größe von 32 oder 64 Samples.

Die Berechnung (siehe Abbildung 4.8) von  $y_0$  geschieht mittels eines FIR-Filters und gibt sofort einen Ausgangswert aus. Es besteht also keine Latenz. In der Zeit, während die ersten  $N$  Samples den FIR-Filter durchlaufen, ist gerade genug Zeit um einen Block von  $N$  Samples für die Berechnung von  $y_1 = x * h_1$  zu sammeln. Die Berechnung von  $y_1$

---

<sup>6</sup>FIFO=First in First Out; Abkürzung für "First In First Out Datenspeicher, das die Einhaltung der Reihenfolge der Elemente sicherstellt.



**Abb. 4.8.:** Minimum-Cost Zerlegung der Impulsantwort unter der Bedingung einer latenzfreien Faltung

erfolgt nun mittels einer schnellen Faltung und muss innerhalb einer Samplingperiode durchgeführt werden, um rechtzeitig  $y_1$  zu Verfügung zu stellen. Um das Prinzip fortzuführen, stellen die Berechnung von  $y_0$  und  $y_1$  wiederum genug Zeit zur Verfügung um einen  $2N$  Punkte großen Block einzulesen um  $y_2 = x * h_2$  zu berechnen. Die letzte in Abbildung 4.8 gezeigte Berechnung ist  $y_3 = x * h_3$ , die über einen  $4N$ -Punkte großen Block gerechnet wird. Wäre die Impulsantwort größer, würde man einen Block der Größe  $8N, 16N, 32N, \text{etc.}$  anhängen.

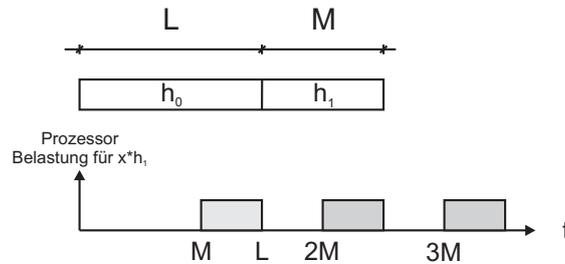
Dieser Algorithmus ist jedoch zunächst ein erster Ansatz einer latenzfreien Blockfaltungsmethode, die in Bezug auf die Prozessorbeanspruchung jedoch unpraktikabel ist. Alle blockweise ausgeführten Berechnungen werden nahezu gleichzeitig ausgeführt, und dürfen außerdem nicht länger wie eine Sampleperiode dauern. Selbst wenn man einen so leistungsfähigen Prozessor hätte, würde man Rechenkapazitäten verschwenden, da der Prozessor die meiste Zeit lediglich auf Daten wartet. Eine wesentlich effizientere Nutzung wäre durch eine über die Zeit gleichmäßig verteilte Auslastung des Prozessors zu erreichen.

Betrachten wir nun als Beispiel die Faltungsoperation  $x * h_1$  genauer. Diese Faltung ist eine sich ständig wiederholende Rechenoperation, die alle  $M$  Samples ausgeführt wird. Das Ergebnis der ersten Blockfaltung  $x * h_1$  muss rechtzeitig zum Zeitpunkt  $L$  fertig sein (Ende der Berechnung  $x * h_0$  mittels FIR-Filter), kann aber erst zum Zeitpunkt  $M$  beginnen, da erst dann alle Eingangsdaten für die Berechnung vorliegen. Bei einer Blockeinteilung ähnlich Abbildung 4.8, führt das zu einer ungleichmäßigen Prozessorauslastung, wie sie in Abbildung 4.9 gezeigt wird.

Wie nun ersichtlich ist, ist die Prozessorauslastung erst dann gleichförmig, wenn gilt

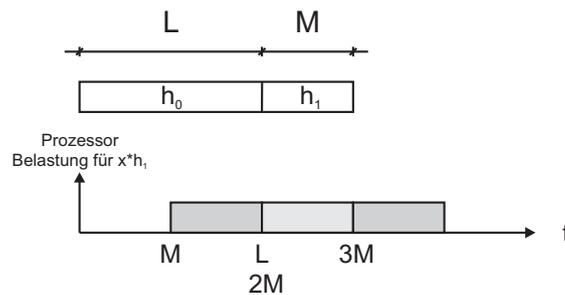
$$L = 2M. \quad (4.16)$$

Bei dieser Wahl der Blockaufteilung, sieht die Prozessorbeanspruchung gemäß Abbildung 4.10 aus. In anderen Worten, geben wir dadurch dem Prozessor die gleiche Zeit



**Abb. 4.9.:** ungleichmäßige Prozessorauslastung aufgrund einer ungeschickten Blockaufteilung

zum Berechnen der Blockfaltung, die er auch benötigt, um die entsprechenden Daten zu sammeln. Mit diesem Ansatz sollte jeder Block der Größe  $M$  mindestens  $L$  oder  $2M$  Samples innerhalb der Impulsantwort beginnen. Das gewährleistet, dass der Prozessor zu keinem Zeitpunkt vom Arbeiten abgehalten wird, weil er auf Daten warten muss.



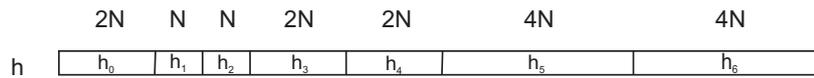
**Abb. 4.10.:** gleichmäßige Prozessorauslastung aufgrund einer Blockaufteilung gemäß  $L = 2M$

Abbildung 4.11 zeigt letztendlich wie die Impulsantwort in Blöcke zerlegt werden muss, damit die Prozessorbeanspruchung gleichförmig bleibt. Abbildung 4.11(a) zeigt eine Impulsantwort der Länge  $16N$ . Die Faltung mit dem ersten Block  $h_0$  der Länge  $2N$  wird wiederum mittels eines FIR-Filters in der direkten Form durchgeführt. Die weiteren Blöcke  $h_1$  bis  $h_6$  haben die Größe  $N, N, 2N, 2N, 4N, 4N$ . Wäre  $h$  noch größer, würde man entsprechend mit zwei Blöcken der Größe  $8N$ , gefolgt von zwei Blöcken der Größe  $16N$  usw. fortfahren. Mit der Ausnahme von  $h_0$  beginnt also jeder Block der Größe  $M$  mindestens  $2M$  Samples innerhalb der Impulsantwort. Abbildung 4.11(b) zeigt den Ablaufplan<sup>7</sup> der verschiedenen Blockfaltungen.

**Beispiel:** Die Faltung von  $x * h_1(0, N)$  beginnt zum Zeitpunkt  $N$ . Diese Berechnung kann unter keinen Umständen früher beginnen, da die für die Berechnung notwendigen Eingangsdaten erst zum Zeitpunkt  $N$  vollständig zur Verfügung stehen. Desweiteren muss diese Berechnung zum Zeitpunkt  $2N$  fertig sein, um die Faltung  $x * h_1(N, N)$  zu beginnen. Für die geradzahligen Blöcke der Impulsantwort ( $h_2, h_4, \text{etc.}$ ) wurde eine künstliche Frist gesetzt, die früher als eigentlich benötigt ist. Die Berechnung von  $x *$

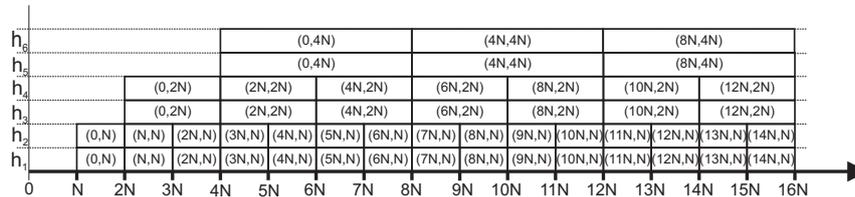
<sup>7</sup>wobei die horizontalen Spalten auf den entsprechenden Block der Impulsantwort verweisen; die Notation  $(0, 4N)$  bedeutet, dass es sich um eine  $4N$ -Punkte große Faltung beginnend mit dem Sample an der Stelle 0 handelt; die  $x$ -Achse kennzeichnet den zeitlichen Verlauf

$h_2(0, N)$  kann ebenfalls erst zum Zeitpunkt  $N$  beginnen, muss eigentlich aber erst zum Zeitpunkt  $3N$  fertig sein, obwohl die Frist auf  $2N$  gesetzt wurde. Mittels dieses Schemas wird eine gleichmäßige Rechenbelastung des Prozessors gewährleistet.



(a)

Faltung mit:



(b)

**Abb. 4.11.:** (a) praktische Zerlegung der Impulsantwort (b) entsprechendes Schema der Blockfaltung

Weitere Ansätze zur Optimierung dieses Algorithmus wären:

1. Vorräusberechnung der Spektren aller Impulsantwort-Blocks
2. Mehrfachverwendung von Eingang-Block-Spektren wann immer es möglich ist. Zum Beispiel wird aus Abbildung 4.11(b) ersichtlich, dass alle geradzahigen Blöcke von  $h[n]$  dieselben Eingangsspektren für die schnelle Faltung verwenden, wie die jeweiligen ungeraden Impulsantwort-Blöcke. Dadurch benötigt z.B. die Blockfaltung von  $x[n] * h_2[n]$  nur noch die Berechnung des spektralen Produktes  $X[k] \cdot H_2[k]$ , sowie einer inversen FFT, da sie das Spektrum des Eingangsblockes  $X[k]$  verwenden kann, das bereits für die Berechnung von  $x * h_1$  erzeugt wurde.

## 5. Simulation

Neben der Erstellung einer Echtzeit-Applikation wurde eine auf MATLAB basierende 3D-Simulation erstellt. In dieser Simulation wird der IEM CUBE, ein mittelgroßer Aufführungsraum für elektronische Musik, in dem letztendlich auch die Applikation erstellt und ausgeführt werden soll, nachgebildet. Mittels der Simulation kann so in einer der Realität näherungsweise entsprechenden Simulationsumgebung das Zeitumkehrprinzip anhand von Schallfeldsimulationen getestet werden.

Die Simulation orientiert sich an dem in Kapitel 3.2 beschriebenen Prozess zur Fokussion von Schallquellen:

1. Vorbereitung der Simulation.
2. An einem Punkt innerhalb der Simulationsumgebung, wird das Schallfeld mittels eines Impulses angeregt. (Hier befindet sich schließlich auch der Fokussionspunkt.)
3. Der simulierte Schallwellenverlauf wird an den Positionen der Lautsprecher erfasst und die so erhaltenen Impulsantworten zeitlich umgekehrt.
4. Eine zweite Simulation simuliert den Schallwellenverlauf eines, mit den umgedrehten Impulsantworten, an den Lautsprecherpositionen angeregten Schallfeldes. (Schallwellen laufen zusammen und fokussieren sich.)
5. Darstellung und Auswertung der Simulationsdaten.

Abbildung 5.1 zeigt den Ablauf der Simulation in Form eines Blockschaltbildes.

### 5.1. Die Simulationsumgebung - Der IEM CUBE

#### 5.1.1. Raumgeometrie

Um den CUBE für die Simulation nachzubilden, musste auf eine Vereinfachung der Raumgeometrie zurückgegriffen werden, da speziell die Rundungen der Decke und der hinteren Wand nur schwer zu simulieren sind. In Abbildung 5.2 und 5.3 sind sowohl der reale Grundriss, sowie die in der Simulation realisierte Approximation zu sehen. Der Ursprung des Koordinatensystems wurde in die Mitte des Raumes auf Bodenniveau gesetzt. Alle Koordinaten haben das Meter als Bezugsgröße.

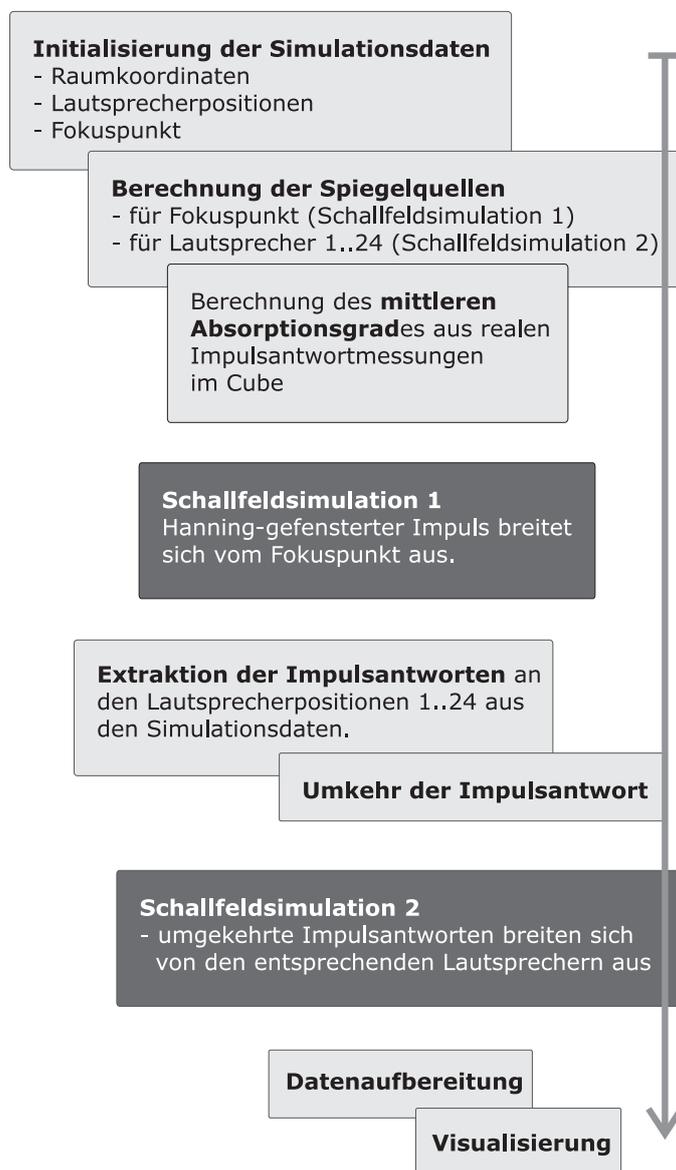
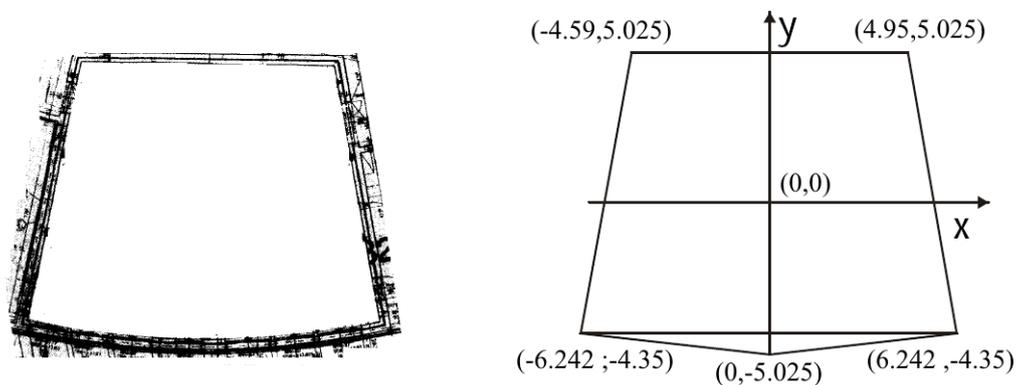
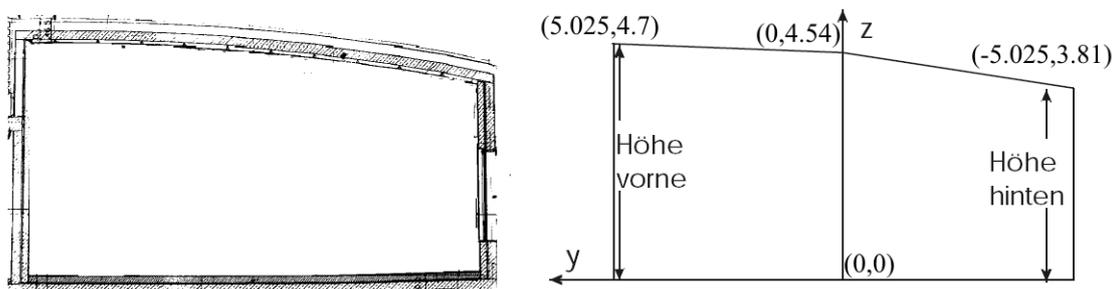


Abb. 5.1.: Aufbau und Ablauf der Simulation des Zeitumkehrspiegels

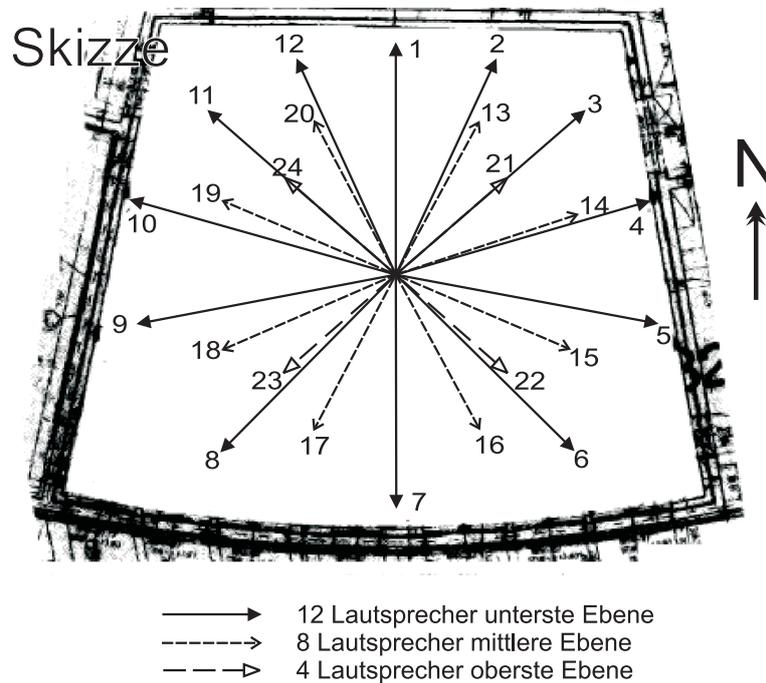


**Abb. 5.2.:** Realer (links) und approximierter (rechts) Grundriss des IEM CUBE. (x,y) Koordinaten in [m]



**Abb. 5.3.:** Reale (links) und approximierter (rechts) Seitenansicht des IEM CUBE. (y,z) Koordinaten in [m]

Das in der Echtzeitapplikation verwendete Beschallungssystem besteht aus einem von 24 Lautsprechern entlang der Oberfläche einer Halbkugel angeordneten, dreidimensionalen Array. Dieses Array besteht aus drei horizontalen Ringen zu 12, 8 und 4 Lautsprechern, wobei die Anzahl der Boxen nach oben hin abnimmt. Da das menschliche Gehör in Blick-Richtung die größte Ortungsempfindlichkeit hat, sind die Lautsprecher im untersten Ring an der vermeintlichen Vorderfront des Raumes am dichtesten angeordnet (siehe Abbildung 5.4). Abbildung 5.4 zeigt eine Skizze der Anordnung aller 24 Lautsprecher. Die in der Simulation verwendeten Koordinaten der Lautsprecherpositionen sind aus Tabelle 5.1.1 ersichtlich.



**Abb. 5.4.:** Die Lautsprecheranordnung im IEM CUBE; 1-12 untere Ebene, 13-20 mittlere Ebene, 21-24 obere Ebene.

### 5.1.2. Berechnung der Nachhallzeit des CUBE und des mittleren Absorptionsgrades

Um die Simulation zu verbessern, wird neben der Raumgeometrie auch die Absorption an den Raumbegrenzungen dem IEM-CUBE angepasst. Dabei wird jedoch lediglich ein mittlerer Absorptionskoeffizient verwendet, der alle Raumbegrenzungen mit den gleichen Absorptionseigenschaften annimmt. Eine detaillierte Modellierung der Schallabsorption basierend auf den unterschiedlichen Materialeigenschaften der Raumbegrenzungen scheint unzweckmäßig.

Dabei werden zwei Schritte vollzogen:

Lautsprecher Nummer	Koordinaten		
	x	y	z
1	0	4.95	1.4
2	2.1	4.9	1.4
3	4.6	4.6	1.4
4	5.1	1.7	1.4
5	5.6	-1.3	1.4
6	4.0	-4.5	1.4
7	0	-4.95	1.4
8	-4.0	-4.5	1.4
9	-5.6	-1.3	1.4
10	-5.1	1.7	1.4
11	-4.6	4.6	1.4
12	-2.1	4.9	1.4
13	1.4	3.38	3.5
14	3.38	1.4	3.5
15	3.34	-1.4	3.5
16	1.4	-3.38	3.5
17	-1.4	-3.38	3.5
18	-3.38	-1.4	3.5
19	-3.38	1.4	3.5
20	-1.4	3.38	3.5
21	1.3	1.3	4.0
22	1.3	-1.3	4.0
23	-1.3	-1.3	4.0
24	-1.3	1.3	4.0

**Tab. 5.1.:** Koordinaten der Lautsprecher 1-24; 1-12 untere Ebene, 13-20 mittlere Ebene, 21-24 obere Ebene

1. Aus den im CUBE gemessenen Impulsantworten wird anhand der Energie-Zeit Kurve die frequenzabhängige Nachhallzeit berechnet.
2. Über die Eyringsche Formel zur Bestimmung der Nachhallzeit wird der mittlere, frequenzabhängige Absorptionsgrad bestimmt.

Eine von *M.R. Schröder* in [27] vorgeschlagene Methode um die Nachhallzeit (auch  $T_{60}$  genannt) eines Raumes zu bestimmen beruht auf energetischen Betrachtungen. Dabei wird aus gemessenen Raumimpulsantworten der Energieverlauf des abklingenden Schallfeldes berechnet. Die Energie-Zeit Kurve<sup>1</sup> erhält man durch Rückwärts-Integration der quadrierten Impulsantwort (siehe Gleichung 5.1). Nach dem Vorschlag des Akustikers *W. C. Sabine* wird unter der Nachhallzeit derjenige Zeitabschnitt (gemessen in Sekunden) verstanden, innerhalb dessen nach Abschalten einer Schallquelle die Schallenergie auf den millionsten Teil abfällt [3]. Dies entspricht einem Abfall von 60dB, wobei üblicherweise lediglich der Abfall zwischen -5dB und -35dB zur Auswertung herangezogen wird, und man die Nachhallzeit durch Verdopplung der sich daraus ergebenden Zeitspanne erhält.

$$E(t) = \int_t^{\infty} p(\tau)^2 d\tau \quad (5.1)$$

Um eine frequenzabhängige Nachhallzeit zu ermitteln, wurde die gemessene Impulsantwort mittels einer Terzfilterbank nach *ANSI S1.1-1986* für die weitere Verarbeitung vorgefiltert. Die daraus erhaltene frequenzabhängige Nachhallzeit ist in Abbildung 5.6 zu sehen.

Über die Eyringsche Formel zur Bestimmung der Nachhallzeit

$$T_{60,Eyr}(f) = \frac{0.163V}{-\ln(1 - \alpha(f))S} \quad (5.2)$$

ergibt sich der Absorptionskoeffizient zu

$$\alpha(f) = 1 - e^{\frac{-0.163V}{T_{60,Eyr}(f)S}}, \quad (5.3)$$

wobei das Raumvolumen  $V$  und die Fläche der Raumbegrenzungen  $S$  mit

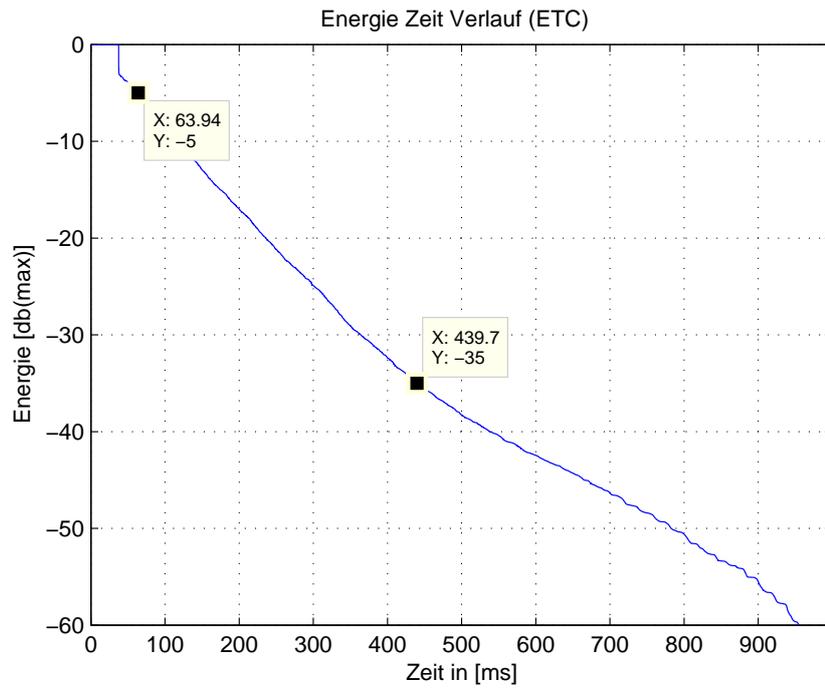
$$V = 475 [m^3] \quad \text{und} \quad S = 387,5 [m^2]$$

angenommen wurden.

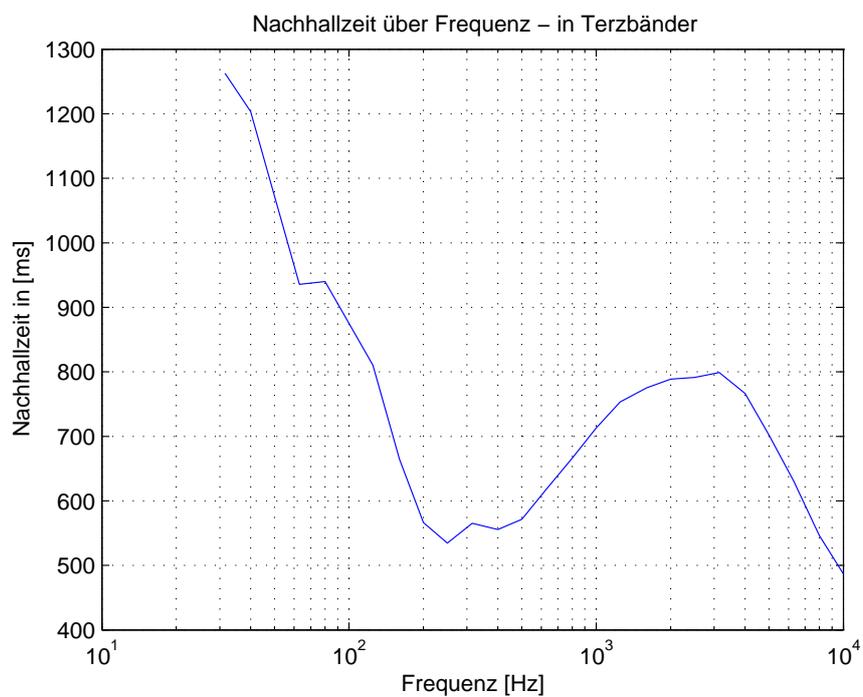
In Abbildung 5.7 ist schließlich der frequenzabhängige Absorptionskoeffizient abgebildet.

---

<sup>1</sup>Genau genommen handelt es sich um die Decaying Energy Time Curve (DETC); in den angeführten Quellen in deutscher Sprache jedoch lediglich als Energie-Zeit Kurve bezeichnet.



**Abb. 5.5.:** Energie-Zeit Verlauf eines abklingenden Schallfeldes. Berechnung aus gemessener, nicht gefilterten Impulsantwort.



**Abb. 5.6.:** Nachhallzeit in Abhängigkeit der Frequenz

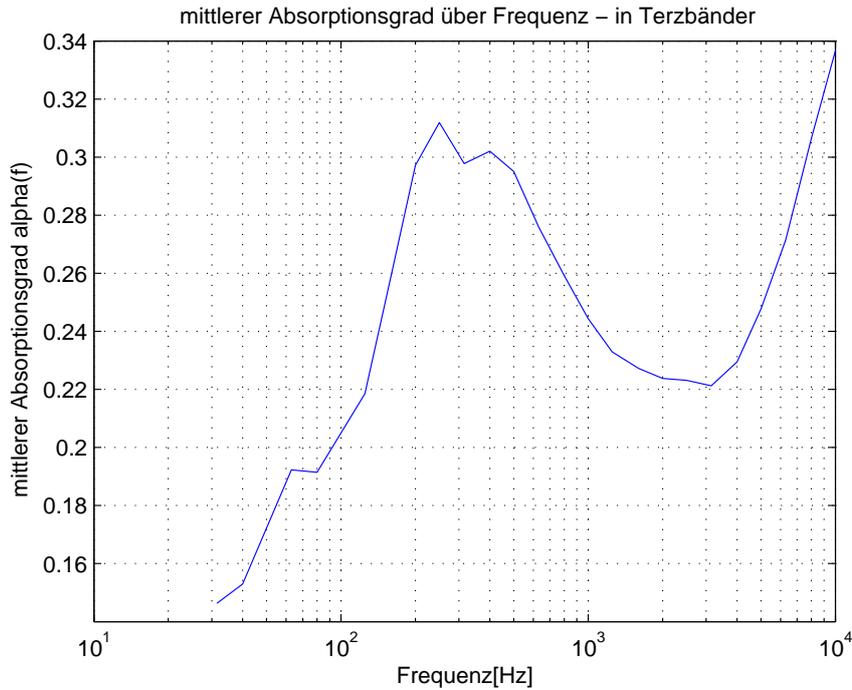


Abb. 5.7.: Mittlerer Absorptionsgrad in Abhängigkeit der Frequenz

## 5.2. Modell der Spiegelquellen und Berechnung

Ein allgemeines, von *Fermat* aufgestelltes Prinzip besagt, dass jede Wellenausbreitung immer auf dem schnellsten Weg vom Sender zum Empfänger gelangt. Dieser schnellste Weg ist aber in einem Medium mit gleicher Fortpflanzungsgeschwindigkeit eben auch der kürzeste, also bei freier Ausbreitung eine Gerade [17]. Dies ist der Ausgangspunkt der *geometrischen* Raumakustik. Die Ausbreitung der von einer Schallquelle emittierten Schallenergie, lässt sich demnach durch sogenannte Schallstrahlen beschreiben, deren Ausrichtung der Richtung der Schallausbreitung entspricht. Die geometrische Raumakustik ist jedoch nur unter Einschränkungen anwendbar. Damit weder das Phänomen Beugung, sowie diffuse Schallreflexionen auftreten, müssen die Reflexionsflächen groß und glatt gegenüber der Wellenlänge sein.

*„Danach sieht es freilich so aus, als ob die geometrischen Gesetze nur sehr selten angewendet werden können. Trotzdem ist es erstaunlich, wie vorteilhaft geometrische Betrachtungen auch dann noch sind, wenn ihre Gültigkeit längst fragwürdig ist. Praktisch fasst man daher auch den Begriff der geometrischen Raumakustik etwas weiter; ja man begreift gelegentlich auch diffuse Reflexionen ein; man versteht dann im wesentlichen alle die Probleme darunter, bei denen man sich nur für die Wege der Schallausbreitung interessiert.“* ([17], Seite 15, Absatz 5)

Im Wesentlichen definiert sich die geometrische Schallausbreitung durch zwei Gesetzmäßigkeiten:

1. Einfallender Strahl, die Normale der Reflexionsfläche und der reflektierte Strahl liegen in einer Ebene.
2. Der Winkel zwischen dem einfallendem Strahl und der Normale der Reflexionsfläche, genannt Einfallswinkel, entspricht dem Winkel zwischen dem reflektiertem Strahl und der Normale der Reflexionsfläche, genannt Ausfallswinkel.

Eine einfache, auf den Gesetzen der geometrischen Raumakustik basierende Möglichkeit Reflexionen an Begrenzungsflächen zu simulieren, stellt das Modell der Spiegelquellen dar. Sobald eine Schallwelle auf eine Wand trifft, sagt uns das Gesetz der regulären Reflexion zunächst, dass Einfalls- und Ausfallswinkel gleich sind, daraus folgt jedoch, dass die rückwärtigen Verlängerungen der reflektierten Strahlen sich hinter der Wand alle in einem Punkt  $S_1$  schneiden, dessen Abstand von der Wand gleich dem der realen Schallquelle  $S_0$  ist. Es scheint, dass alle von der Wand reflektierten Schallwellen von dem Punkt  $S_1$  (Spiegelpunkt) auszugehen scheinen. Man bezeichnet diese virtuelle Quelle im Punkt  $S_1$  als Spiegelquelle. In Abbildung 5.8 wird die Reflexion an einer ebenen Wand verdeutlicht.

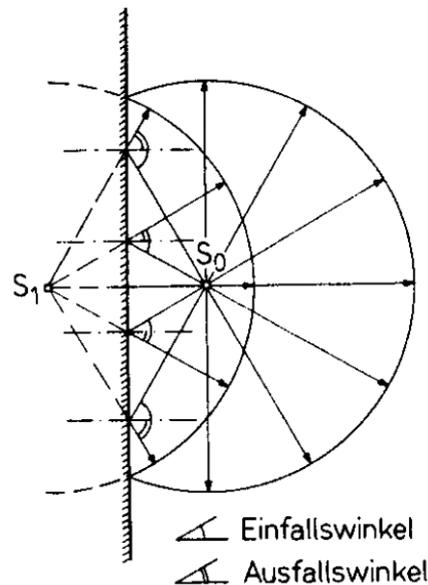


Abb. 5.8.: Spiegelung an einer ebenen Wand [17].

Einen Spezialfall stellen zwei im rechten Winkel aneinanderstoßende Wände dar (Abbildung 5.9). Hierbei kommt es nur zu höchstens zwei Reflexionen; es können daher nur Spiegelbilder zweiter Ordnung auftreten. Dabei spielt es keine Rolle, ob die Schallwelle zunächst an der x-Wand und schließlich der y-Wand oder in umgekehrter Reihenfolge reflektiert wird. Jeder in die Ecke gerichtete Schallstrahl verläßt diese demnach nach zweimaliger Reflexion entgegengesetzt seiner ursprünglichen Richtung. Im Grenzfall, dass der Strahl in den Scheitel gerichtet ist, läuft er sich sogar auf demselben Weg entgegen [17]. Das dies jedoch nur für tatsächlich rechtwinklige Wandanordnungen gilt, verdeutlicht Abbildung 5.10.

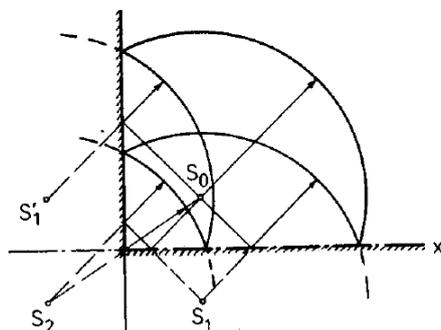


Abb. 5.9.: Spiegelung an zwei rechtwinklig zueinander angeordneten Wänden [17].

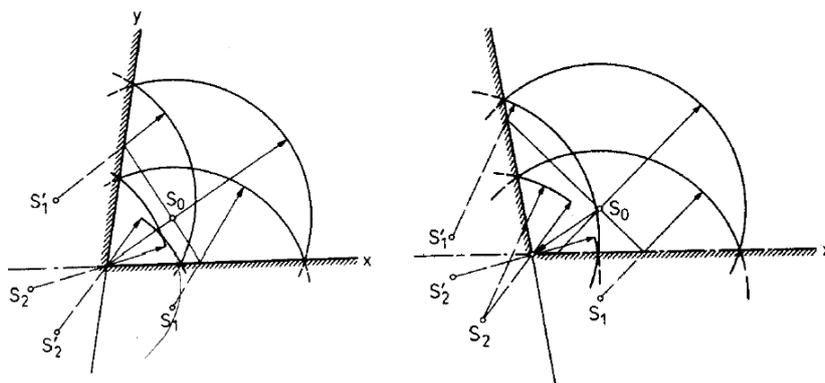
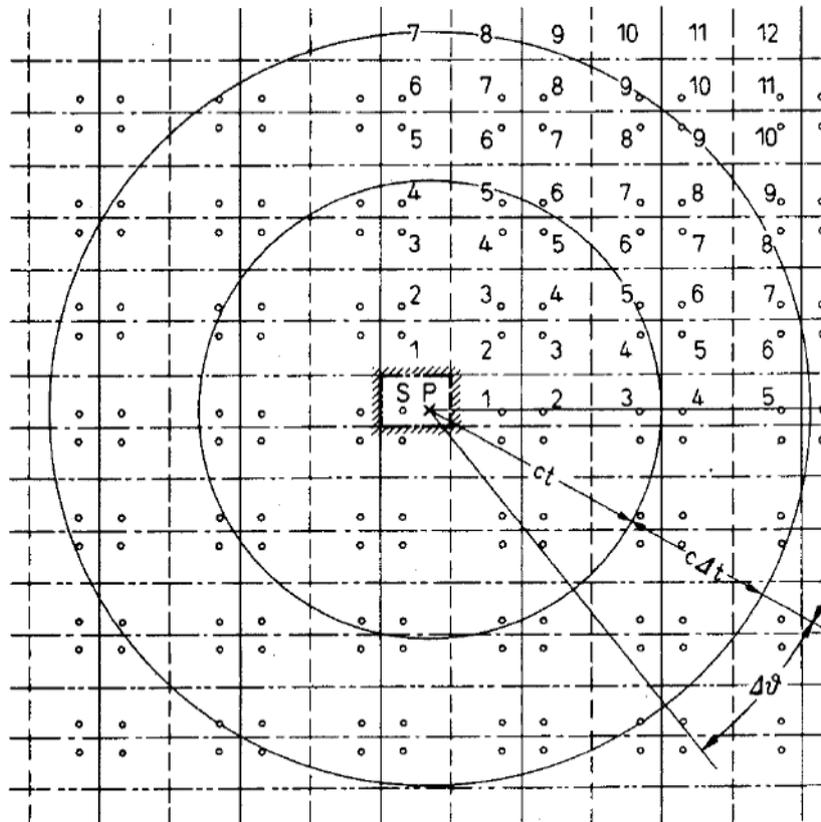


Abb. 5.10.: Spiegelung an zwei nicht rechtwinklig aneinander grenzende Wände [17].

Da eine reflektierte Wellenfront in einem geschlossenen Raum erneut auf eine Begrenzung treffen und reflektiert wird, ergibt sich ein zur Raumgeometrie symmetrisches Muster an Spiegelquellen zunehmender Ordnung (siehe Abbildung 5.11). Theoretisch lässt sich dieses Spiegelquellenmuster ins Unendliche fortsetzen. In der Realität führen jedoch Schallabsorptionen an den Begrenzungsflächen zu einer Abnahme der Schallenergie, so dass die Energie der Schallwelle letztendlich ins Bedeutungslose abnimmt und die Spiegelquellen höherer Ordnung keine Rolle mehr spielen.

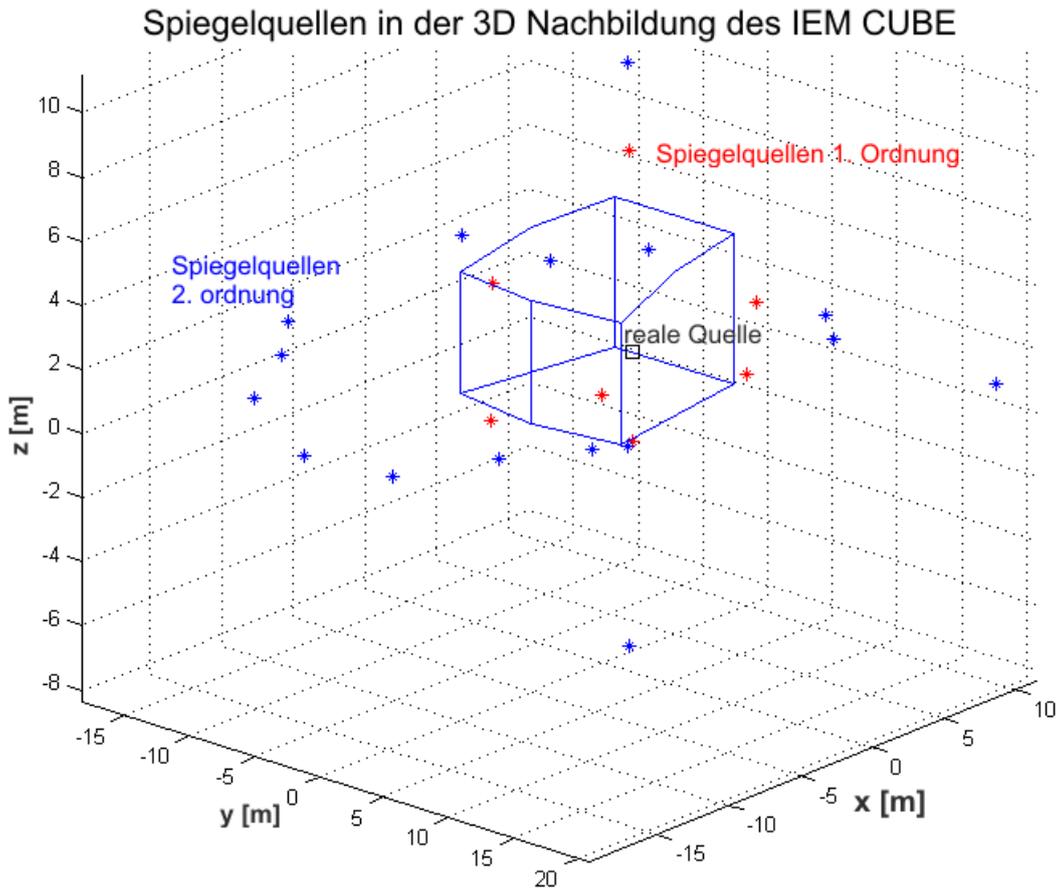
Unter Annahme einer omnidirektionalen Schallquelle  $S$  lässt sich die Wellenverteilung in einem Rechteckraum zu einem Zeitpunkt  $t$  auf einfache Weise bestimmen. Hierzu braucht man lediglich die Strecke  $ct$  in den Zirkel zu nehmen und um alle diejenigen Spiegelpunkte damit einen Kreis zu schlagen, welche dabei den ursprünglichen Rechteckraum treffen. Um von einer Momentaufnahme des Schallfeldes zu seinem zeitlichen Verlauf zu gelangen, wird das Erregersignal zeitsynchron im Sender, sowie in allen Spiegelquellen abgespielt. Der im Simulationsraum vorhandene Schallwellenverlauf entspricht dem durch das Erregersignal, sowie den Reflexionen an den Begrenzungsflächen zustande gekommenen Schallfeld.



**Abb. 5.11.:** Zweidimensionale Anordnung der Spiegelquellen für eine Rechteckraum. Der Raum in der Mitte stellt den Originalraum mit der realen Schallquelle  $S$  dar, die Spiegelquellen sind entsprechend ihrer Ordnung nummeriert [17].

Abbildung 5.12 zeigt letztlich das Spiegelquellenmodell zweiter Ordnung des IEM

CUBE.



**Abb. 5.12.:** Spiegelquellenmodell des dreidimensional nachgebildeten IEM CUBE. Es kommen Spiegelquellen bis zur zweiten Ordnung vor. [15]

### 5.3. Berechnung des Schallfeldes

Wie in Kapitel 5.2 gezeigt wurde, ist die Verwendung von Spiegelquellen eine einfache Möglichkeit Raumreflexionen zu simulieren. Die Berechnung der simulierten Schallfelder basiert auf dieser Methode der geometrischen Raumakustik.

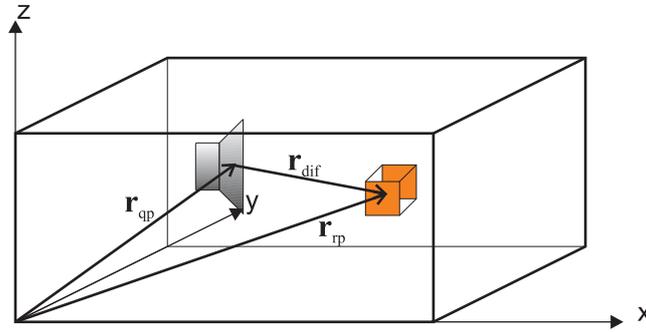
Der Schallfeldverlauf wird dabei jedoch nicht im Zeit- sondern im Frequenzbereich berechnet. Dafür ist es notwendig das Erregersignal zuvor ebenfalls in den Frequenzbereich zu transformieren. Das Schallfeld, wird wie folgt für jede Frequenz einzeln bestimmt und man erhält durch spätere Rücktransformation in den Zeitbereich, die zeitliche Schallfeldverteilung. In kartesischen Koordinaten ergibt sich mit  $\mathbf{r}_{qp}$ , dem Vektor auf die Schallquelle<sup>2</sup> und  $\mathbf{r}_{rp}$ , dem Vektor auf den zu berechnenden Punkt innerhalb des

<sup>2</sup>Die Schallquelle kann real oder auch virtuell, also eine Spiegelquelle sein und  $r_{qp}$  muss daher nicht zwangsläufig innerhalb des zu simulierenden Raumes liegen.

Simulationsraumes, der Abstand  $r_{dif}$  von Quellpunkt zum zu berechnenden Raumpunkt (siehe Abbildung 5.13) zu:

$$\mathbf{r}_{dif} = \mathbf{r}_{rp} - \mathbf{r}_{qp} = (x_{rp} - x_{qp}) \mathbf{e}_x + (y_{rp} - y_{qp}) \mathbf{e}_y + (z_{rp} - z_{qp}) \mathbf{e}_z$$

$$r_{dif} = \sqrt{(x_{rp} - x_{qp})^2 + (y_{rp} - y_{qp})^2 + (z_{rp} - z_{qp})^2} .$$



**Abb. 5.13.:** Die zur Berechnung des Schallfeldes benötigten Vektoren.

Mit

$$A(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt ,$$

der Fourier-Transformierten des Erregersignals, sowie dem in Kapitel 5.1.2 berechneten Absorptionskoeffizienten  $\alpha(f)$  und der Ordnung  $Ord$  der Spiegelquellen, ergibt sich das Schallfeld für eine Frequenz aus der Summe aller Beiträge der  $M$  reellen und virtuellen Schallquellen zu

$$P(\mathbf{r}_{rp}, f) = \sum_{i=1}^M \frac{A(f) \left( \sqrt{1 - \alpha(f)} \right)^{Ord,i}}{r_{dif,i}} e^{-j \frac{2\pi f r_{dif,i}}{c}} . \quad (5.4)$$

Da uns letztendlich der zeitliche Verlauf des Schalldrucks interessiert, muss das im Frequenzbereich vorliegende Schallfeld in den Zeitbereich transformiert werden. Da der Schalldruck eine reelle Funktion darstellt, reicht es aufgrund der Eigenschaft der Fouriertransformation aus Gleichung 5.5 das Schallfeld lediglich für Frequenzen von  $f = 0$  bis  $f = \frac{f_s}{2}$ , der halben Abtastfrequenz zu berechnen, ohne das Information verloren geht.

$$|X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})| \quad (5.5)$$

Trotz dieser Rechenersparnis vom Faktor 2, ist es dennoch enorm aufwendig das Schallfeld in einem vollen dreidimensionalen Raum zu berechnen. Um eine korrekte grafische Darstellung zu gewährleisten muss die grafische Auflösung, und damit die Anzahl

der berechneten Raumpunkte, hoch genug sein um alle Frequenzen eindeutig darzustellen. Ebenso wie das Abtasttheorem im Frequenzbereich, so muss auch in spatialer Hinsicht ein Abtasttheorem erfüllt werden. Für die Bild-Auflösung in Abhängigkeit der Raummaße  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  ergibt sich damit eine minimale Auflösung  $x_{res}$  von:

$$\begin{aligned}
 f_{max} &= \frac{f_s}{2} \quad \dots \text{höchste vorkommende Frequenz} \\
 \lambda_{min} &= \frac{c}{f_{max}} \quad \dots \text{daraus resultierende kleinste Wellenlänge} \\
 x_{min} &= \frac{\lambda_{min}}{2} \quad \dots \text{grafische Gitterbreite} \\
 \boxed{x_{res} = \frac{\Delta x}{x_{min}} \cdot} & \quad (5.6)
 \end{aligned}$$

Respektives gilt für alle Raumdimensionen.

Für unser Modell des IEM CUBE läßt sich damit bei einer Samplingfrequenz von  $f_s = 4096\text{Hz}$  sowie einer angenommenen Schallgeschwindigkeit von  $c = 340[\frac{\text{m}}{\text{s}}]$  die grafische Auflösung von

$$x_{res} = 151 \quad , y_{res} = 121 \quad , z_{res} = 57 \quad (5.7)$$

Bildpunkten berechnen.

Die so erhaltene Auflösung erfüllt zwar das spatiale Abtasttheorem, stellt jedoch lediglich eine Mindestanforderung dar, um spatiales Aliasing zu vermeiden. Um eine optisch ansprechende Darstellung der berechneten Daten zu gewährleisten, sollte die Gitterbreite weiter reduziert und damit die grafische Auflösung erhöht werden. Dies entspricht spatialem Oversampling. Gemäß [21] stellt eine vierfache Überabtastung in allen drei Raumdimensionen einen guten Kompromiss zwischen der verbesserten Bildqualität und dem erhöhten Rechenaufwand dar. Hadar *et al.* sind in [12] zu dem Schluss gekommen, dass spatiales Oversampling mit einem größeren Faktor als 8 keinerlei signifikante Verbesserung der Bildqualität nachsichzieht.

Die zeitliche Auflösung der Schallfeldsimulation ist proportional zur räumlichen Auflösung des berechneten Schallfeldes, und entspricht dem Kehrwert der Samplingfrequenz. Die zeitliche Auflösung von

$$\Delta T = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{4096} 1000 = 0.244[\text{ms}] \quad (5.8)$$

entspricht damit der Zeit, die eine Welle benötigt, um die Strecke  $x_{min}$  zurückzulegen.

## 5.4. Extraktion der Impulsantworten und Zeitumkehr

Das aus der ersten Schallfeldsimulation hervorgegangene Schallfeld wird nun an den Positionen der Lautsprecher aufgezeichnet. Die daraus gewonnenen Impulsantworten werden

umgedreht und in der zweiten Schallfeldsimulation als Erregersignale verwendet. Da die Impulsantworten im Zeitbereich vorliegen, und auch im Zeitbereich weiterverarbeitet werden, bietet es sich an die Zeitumkehr im Frequenzbereich durchzuführen.

Für die Fouriertransformation gilt:

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathfrak{F}} X(e^{j\omega}) \quad (5.9)$$

und für eine zeitumgekehrte Folge

$$x[-n] \xleftrightarrow{\mathfrak{F}} X(e^{-j\omega}) . \quad (5.10)$$

Da es sich bei den umzukehrenden Impulsantworten um reelle Folgen handelt, kann aufgrund der Symmetrieeigenschaften der Fouriertransformation die Zeitumkehr aufgrund von

$$x[-n] \xleftrightarrow{\mathfrak{F}} X^*(e^{j\omega}) \quad (5.11)$$

durch einfache komplexe Konjugation im Frequenzbereich durchgeführt werden.

Mit diesen Signalen wird letztlich die zweite Schallfeldsimulation durchgeführt. Natürlich kommen jetzt die Spiegelquellen der Lautsprecher zum Einsatz, die Berechnung erfolgt jedoch gemäß dem in Absatz 5.3 beschriebenen Verfahren.

## 6. Messung

### 6.1. Messung der Impulsantwort

Eine der wichtigsten Eigenschaften eines Übertragungssystemes ist seine Impulsantwort. Es gibt zahlreiche Methoden diese durch ein Messsystem zu erfassen, wenige jedoch, die folgende Anforderungen erfüllen:

- Absolute Reproduzierbarkeit des Anregungssignales.
- Großer Signal-Rauschabstand der gemessenen Impulsantwort, um eine störungsfreie Weiterverarbeitung zu gewährleisten.
- Gute Unterdrückung der im Messweg auftretenden Nichtlinearitäten.

Die verschiedenen Messmethoden unterscheiden sich im Wesentlichen durch die Wahl des Erregersignales, sowie die Nachverarbeitung der gemessenen Daten.

Im Folgenden werden die gängigsten Messmethoden zur Messung der Raumimpulsantwort kurz beschrieben. Die in dieser Diplomarbeit verwendete Methode, die logarithmische Sweep-Technik, wird dabei genauer besprochen.

Genau betrachtet handelt es sich bei den Impulsantwortmessungen innerhalb dieser Diplomarbeit nicht um mittlere, den vollständigen Raum beschreibende Raumimpulsantworten. Vielmehr geht es um die messtechnische Bestimmung des Übertragungspfades zwischen zwei innerhalb des Raumes liegenden Punkten.

#### 6.1.1. Messung mittels einfacher Impulserregung

Einen Impuls als Messsignal zu verwenden, scheint die natürlichste und einfachste Weise zu sein, einem Raum seine Impulsantwort zu entlocken. Der Impuls kann analog erzeugt werden, wie zum Beispiel durch einen Pistolenschuss welcher jedoch schlecht reproduzierbar ist, oder digital und schließlich über einen Digital-Analog-Wandler, sowie Verstärker und Lautsprecher wiedergegeben werden. Über einen Impuls wird der Raum in einem Punkt (nennen wir ihn Quellpunkt) mit maximaler Bandbreite angeregt, und es entsteht ein sich im Messraum ausbreitendes Schallfeld. Mittels eines Mikrofons ist nun lediglich das Schallfeld an einem Messpunkt (Aufpunkt) innerhalb des Raumes aufzuzeichnen. Das

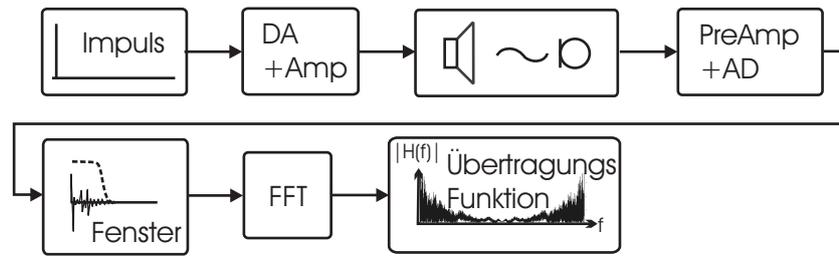


Abb. 6.1.: Messverfahren zur direkten Erlangung der Impulsantwort [20]

aufgezeichnete Signal entspricht, wie der Name bereits verrät, der Impulsantwort des Übertragungspfades zwischen Quell- und Aufpunkt. Mittels Transformation in den Frequenzbereich erhält man die entsprechende Übertragungsfunktion (siehe Abbildung 6.1).

Die direkte Verwendung eines Impuls ist jedoch nicht ganz unproblematisch. Der Dirac-Impuls ist ein Signal rein theoretischer Natur. Er ist unendlich hoch, unendlich schmal und besitzt eine Fläche der Größe 1. Der Dirac-Impuls enthält jegliche Frequenzen zu gleichem Teil und vollständig kohärenten Phasen (vgl. weißes Rauschen<sup>1</sup>) und würde sich deswegen hervorragend als Messsignal eignen. So ideal dies auch scheinen mag, ist ein Dirac-Impuls jedoch nicht realisierbar. Dennoch können dem Dirac-Impuls ähnliche Formen erzeugt und zu Messzwecken verwendet werden. Ob diese Signalform letztlich wirklich so ideal ist, ist jedoch fraglich. Ein weiterer Punkt von Wichtigkeit, ist die transportierte Schalleistung eines Messsignals. Besonders bei raumakustischen Messungen muss dem Raum durch das Messsignal ausreichend Schallenergie zugeführt werden um zum einen die gesamte Rauminformation zu erhalten, zum anderen einen ausreichenden Signal-Rauschabstand zu gewährleisten.

In der Signaltheorie nennt man das Verhältnis von Scheitelwert zu Effektivwert den Crestfaktor<sup>2</sup>. Da der Effektivwert, der Leistung eines Signales proportional ist, stellt der Crestfaktor praktisch ein Verhältnis zwischen dem Spitzenwert und der abgegeben Leistung eines Signals dar. Da ein Messsystem durch eine endliche Belastbarkeit nicht beliebig hohe Spitzenpegel verarbeiten kann, kann dem Meßobjekt nur bei einem Crestfaktor von 1 die maximale Energie zugeführt werden. Darüber hinaus würde eine Erhöhung der zugeführte Energie durch entsprechende Verstärkung des Messsignals das Wiedergabesystem, vor allem die Lautsprecher, stark belasten und es könnte zur Zerstörung, oder zu Verfälschungen des Messergebnisses durch nichtlineare Wiedergabe im Grenzbereich des Lautsprechers führen.

Durch eine zeitliche Aufweitung des Impulses könnte die Leistung erhöht, und damit mehr Energie transportiert werden, im Frequenzbereich würde das jedoch einer Tiefpaßfilterung entsprechen, so dass der Raum nicht mehr gleichmäßig über den gesamten Frequenzbereich angeregt würde.

<sup>1</sup>Weißes Rauschen hat zwar ebenfalls einen konstanten Amplitudenbelag über den Frequenzgang, jedoch vollständig inkohärente Phasengang

<sup>2</sup> $C = \frac{\hat{x}}{\sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t) dt}}$

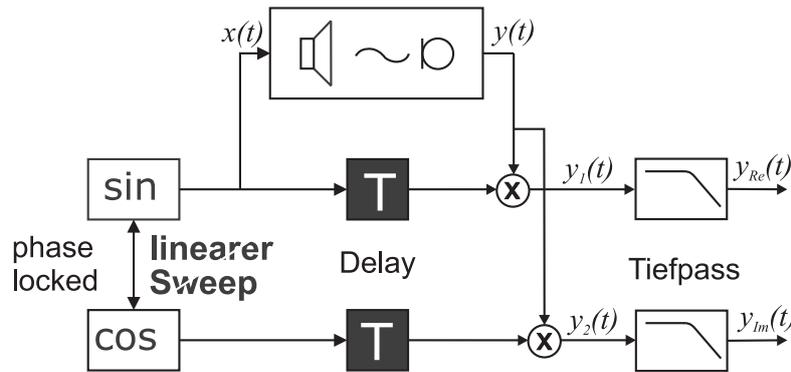


Abb. 6.2.: Modell und Signalverarbeitung der TDS

Eine weitere Möglichkeit um den Signal-Rauschabstand zu erhöhen, wäre die zeitsynchrone Mittelung mehrerer Messdurchläufe, die pro Verdopplung der gemittelten Messergebnisse eine Verbesserung des Signal-Rauschabstandes von 3dB zur Folge hätte. Diese Methode zur Verbesserung des SNR wird jedoch schnell zu einem zeitintensiven Unterfangen.

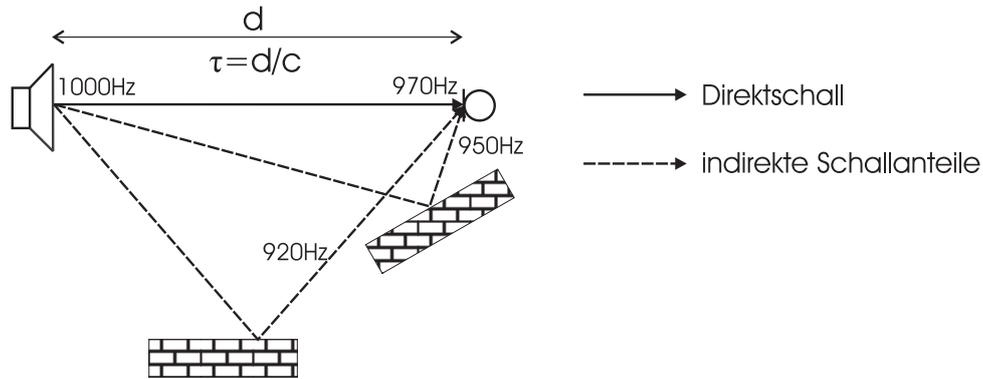
### 6.1.2. Messung mittels Time Dealy Spectrometry (TDS)

Die TDS-Methode wurde ursprünglich zur Messung der Übertragungsfunktion von Lautsprechern entwickelt. Dabei zielte sie darauf ab, unerwünschte Raumreflektionen, sowie Nichtlinearitäten heraus zu filtern. Sie kann jedoch durch eine Modifikation ebenfalls zur Bestimmung des Übertragungsverhaltens von raumakustischen Anwendungen, sowie allen LTI-Systemen herangezogen werden.

Das Funktionsprinzip wird in Abbildung 6.2. Als Messsignal kommt dabei ein mittels Oszillator erzeugter linearer Sinus-Sweep zum Einsatz, der über Lautsprecher dem Messraum zugeführt wird. Parallel zu dem Lautsprecher zugeführten Sinus-Oszillator läuft ein zweiter phasen-synchronisierter Cosinus-Oszillator mit. Desweiteren werden zwei Verzögerungsglieder benötigt, um die akustische Laufzeit zwischen Lautsprecher und Mikrofon auszugleichen. Letztendlich durchläuft das mittels Mikrofon gemessene, sowie das synchronisierte Cosinus-Sweep Signal noch eine Multiplizierstufe. Die Multiplikation zweier Signale entspricht einer Ringmodulation und es entstehen dadurch ein Differenz- und ein Summenspektrum <sup>3</sup>.

Da der am Mikrofon ankommende Schall durch die verschiedenen akustischen Laufzeiten der Ausbreitungswege unterschiedliche Momentan-Frequenzen hat (siehe Abbildung 6.3), können durch korrekte Einstellung der Verzögerungsglieder ( $\tau = \frac{d}{c}$ ) und der Tiefpassfilter (Filterung des durch die Multiplikation entstandenen Summenspektrums) sämtliche durch Reflexionen entstandenen indirekten Schallanteile, sowie durch Nichtlinearitäten entstandene Verzerrungsprodukte ausgeblendet werden.

<sup>3</sup>( $f_A = (f_{E1} + f_{E2})$  und  $(f_{E1} - f_{E2})$ )



**Abb. 6.3.:** Durch den linearen Sweep sowie die akustische Laufzeit entstandene Frequenzunterschiede in der Übertragungsstrecke.

Die folgenden mathematischen Überlegungen für eine Frequenz sollten das Grundprinzip verdeutlichen:

Das Eingangssignal  $x(t)$  habe folgende Form:

$$x(t) = \sin(\omega_0 t). \quad (6.1)$$

Für ein lineares System wird das Ausgangssignal somit zu

$$y(t) = |H(j\omega_0)| \sin[\omega_0 t + \psi(\omega_0)], \quad (6.2)$$

wobei  $|H(j\omega_0)|$  der Betrag und  $\psi(\omega_0)$  die Phase der Übertragungsfunktion für die Frequenz  $\omega_0$  angeben.

Durch Anwendung des Additionstheorems  $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)$  und der Multiplikation mit den beiden Oszillatorsignalen  $\sin(\omega_0 t)$  und  $\cos(\omega_0 t)$  ergibt sich schließlich

$$y_1(t) = |H(j\omega_0)| \{ \sin(\omega_0 t) \cos(\omega_0 t) \sin[\psi(\omega_0)] + \sin^2(\omega_0 t) \cos[\psi(\omega_0)] \} \quad (6.3)$$

und

$$y_2(t) = |H(j\omega_0)| \{ \cos^2(\omega_0 t) \sin[\psi(\omega_0)] + \sin(\omega_0 t) \cos(\omega_0 t) \cos[\psi(\omega_0)] \} \quad (6.4)$$

Die Anwendung der Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \cos^2(\alpha) &= \frac{1}{2} [1 + \cos(2\alpha)] \\ \sin^2(\alpha) &= \frac{1}{2} [1 - \cos(2\alpha)] \\ \sin(\alpha) \cos(\alpha) &= \frac{1}{2} \sin(2\alpha) \end{aligned}$$

führt zu

$$y_1(t) = |H(j\omega_0)| \left\{ \frac{1}{2} [1 - \cos(2\omega_0 t)] \cos [\psi(\omega_0)] + \frac{1}{2} \sin(2\omega_0) \sin [\psi(\omega_0)] \right\} \quad (6.5)$$

und

$$y_2(t) = |H(j\omega_0)| \left\{ \frac{1}{2} [1 + \cos(2\omega_0 t)] \sin [\psi(\omega_0)] + \frac{1}{2} \sin(2\omega_0) \cos [\psi(\omega_0)] \right\}. \quad (6.6)$$

Durch den anschließenden Tiefpass werden  $y_1(t)$  und  $y_2(t)$  die Frequenzanteile mit der doppelten Eingangsfrequenz entfernt. Dadurch erhält man an den Ausgängen den Realteil, sowie den Imaginärteil der Übertragungsfunktion, die beide jedoch mit dem Faktor  $\frac{1}{2}$  gewichtet sind. Mittels der inversen Fouriertransformation kann die komplexe Übertragungsfunktion in den Zeitbereich transformiert werden und ergibt so die Impulsantwort der Übertragungsstrecke.

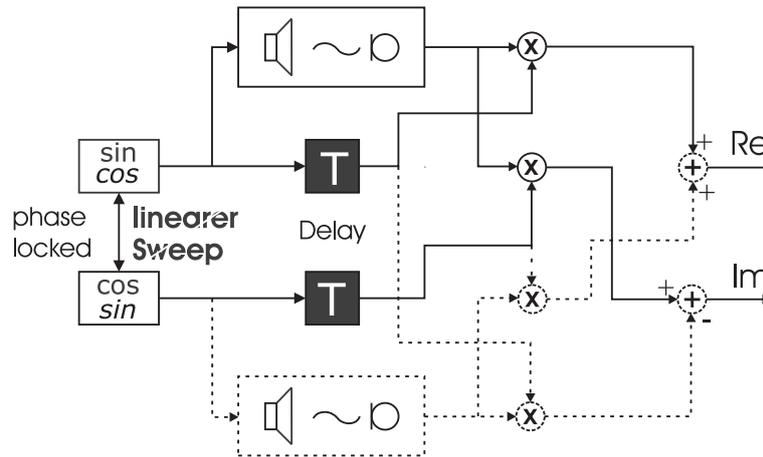
$$y_R(t) = \frac{1}{2} |H(j\omega_0)| \cos [\psi(\omega_0)] \quad (6.7)$$

$$y_I(t) = \frac{1}{2} |H(j\omega_0)| \sin [\psi(\omega_0)] \quad (6.8)$$

Um mittels der TDS Raumimpulsantworten messen zu können, muss das Verfahren jedoch etwas modifiziert werden (siehe Abbildung 6.4). Dabei sind zwei aufeinander folgende Messungen notwendig. Die erste der beiden Messungen verläuft wie bereits besprochen (durchgezogene Linie). Der aus einer zweiten (gestrichelte Linie), "gespiegelten" Messung hervorgegangene Realteil, wird zu dem Realteil aus der ersten Messung addiert. Der Imaginärteil der zweiten Messung wird vom Imaginärteil der ersten Messung subtrahiert. Damit fallen die durch die Multiplikatoren entstandenen Summenterme heraus und die anschließenden Tiefpässe werden nicht mehr benötigt. Durch das Wegfallen der Tiefpassfilter können nun auch Reflexionen in die Messung miteinbezogen, und vollständige Impulsantworten gemessen werden [20]. Die durch Verzerrung auftretenden Obertöne werden jetzt jedoch nicht mehr vom Tiefpassfilter unterdrückt und können das Messergebnis verfälschen. Dieses Messverfahren ist daher nicht immun gegen Verzerrungen.

Ein Problem der TDS-Messung stellt das schlagartige Einsetzen des Sweep-Signals dar, das eine Welligkeit am unteren und oberen Ende des Frequenzbereiches zur Folge hat. Möglichkeiten dies zu umgehen, wären zum einen die Ausweitung der Sweepbandbreite und dadurch nicht im Messbereich liegende Start- und Endfrequenzen, oder die Verwendung eines im Frequenzbereich konstruierten Sweepsignals. Ein weiteres Problem stellt der geringe Signal-Rauschabstand im tieffrequenten Bereich der Messung dar. Wird der gesamte Hörbereich (20Hz-20000Hz) mittels eines linearen Sweeps innerhalb einer Sekunde durchlaufen, wird dem Raum im tieffrequenten Bereich bis 100Hz lediglich

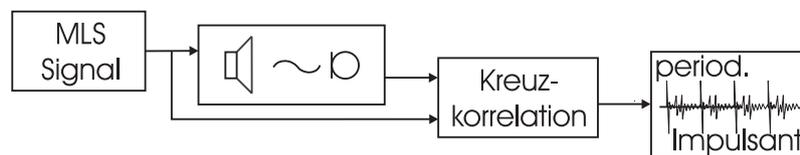
für  $5\text{ms}^4$  Schallenergie zugeführt, was nicht ausreichend ist, um ein getreues Abbild des Übertragungsverhaltens in diesem Frequenzbereich zu erhalten, da ein Raum eine gewisse Zeit braucht bis er bei angeregtem Zustand eingeschwungen ist.



**Abb. 6.4.:** Für die Messung von Raumimpulsantworten modifizierte TDS-Methode. Realteil des ersten Messdurchgangs (durchgezogen) wird zu dem des zweiten (gestrichelt) addiert. Die Imaginärteile werden abgezogen.

### 6.1.3. Messung mittels Maximum Length Sequence

Bei der MLS-Messung wird die Impulsantwort mit einem speziellen, reproduzierbaren und energiereichen Signal, dem MLS-Signal unter Verwendung einer zirkulären Auto- und Kreuzkorrelation bestimmt. Das MLS-Signal selbst ist ein periodisches, binäres Pseudozufallssignal, dessen Autokorrelationsfunktion jedoch idealerweise die Form eines Impulses hat. Das zu messende System wird mittels dieses MLS-Signals angeregt, und die daraus hervorgehende Systemantwort mit dem bekannten MLS-Erregersignal kreuzkorreliert. Daraus geht die periodische Impulsantwort (PIR) des Systems hervor (siehe Abbildung 6.5).



**Abb. 6.5.:** Blockschaltbild der MLS-Methode

Zur Erzeugung des Pseudozufallssignals werden über EXOR-Tore rückgekoppelte Schieberegister eingesetzt. Wenn  $m$  die Länge des Schieberegisters ist, so kann man

$$420\text{Hz} + \frac{20000\text{Hz} - 20\text{Hz}}{1\text{s}} t = 100\text{Hz}; t = 5\text{ms}$$

bei richtiger Wahl der Rückkopplung Pseudozufallszahlen, die sich erst nach  $2^m - 1$  Takten wiederholen erzeugen. Jede mögliche  $m$ -Bit Kombination tritt genau einmal an den parallelen Ausgängen des Schieberegisters auf, die Zustände *high* und *low* sind also gleichverteilt. Es wird über die Logik ebenfalls gewährleistet, dass keine 0- oder 1-Folge entsteht.

Die binäre Folge wird den Werten 1 und -1 (bezogen auf die positiven und negativen Vollaussteuerung der D/A-Umsetzung) zugeordnet und durch die zur Nulllinie symmetrische Verteilung der Gleichanteil eliminiert. Da sich Spitzen- und RMS-Wert entsprechen (sie betragen natürlich beide den Wert 1) hat das MLS-Signal einen Crestfaktor von 1.

Die Folgenlänge des MLS-Signals ergibt sich also zu

$$L = 2^m - 1, \quad (6.9)$$

wobei  $m$  die Größe des Schieberegisters ist, und auch *Ordnung* der MLS genannt wird.

Die sich daraus ergebende Periodenlänge ist natürlich von der Abtastrate  $f_s$  des digitalen Verbundes abhängig und beträgt

$$T = \frac{L}{f_s}, \quad (6.10)$$

woraus sich eine Frequenzauflösung von

$$\Delta f = \frac{1}{T} = \frac{f_s}{L} \quad (6.11)$$

ergibt.

**Autokorrelationsfunktion** Eine wichtige Größe zur Beschreibung zufälliger Signale stellt die Autokorrelation dar (siehe Gleichung 6.12)

$$\Phi_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) x(t + \tau) dt \quad (6.12)$$

Da es sich bei dem MLS-Signal um eine periodische, stetig wiederkehrende Zahlenfolge der Länge  $L$  handelt, geht die Autokorrelationsfunktion in eine zirkulare Autokorrelationsfunktion über und die Integrationsgrenzen orientieren sich an der Periodendauer des MLS-Signals. Durch die zeitdiskrete Verarbeitung kann das Integral in eine Summe überführt werden.

$$\tilde{\Phi}_{xx}[n] = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} \tilde{x}[k] \tilde{x}[k + n] \quad (6.13)$$

Das Ergebnis der zirkularen Autokorrelationsfunktion sieht dann folgendermaßen aus:

$$\tilde{\Phi}_{xx}[n] = \begin{cases} 1 & \text{für } n = kL \\ -\frac{1}{L} & \text{für } n \neq kL, \end{cases} \quad (6.14)$$

was nicht verwunderlich ist, da das Signal ja nur bei Verschiebung um ganze Perioden mit sich selbst korreliert.

Durch die Skalierung mit dem Faktor  $\frac{L}{L+1}$  um einen Spitze-Spitze Wert von 1 zu erhalten, erhält man

$$\tilde{\Omega}_{xx}[n] = \begin{cases} \frac{L}{L+1} & \text{für } n = kL \\ -\frac{1}{L+1} & \text{für } n \neq kL. \end{cases} \quad (6.15)$$

Dieser Ausdruck kann auch als eine Folge von periodischen Einheitsimpulsen und einem Gleichanteil ausgedrückt werden (Gleichung 6.16).

$$\tilde{\Omega}_{xx}[n] = \tilde{\delta}[n] - \frac{1}{L+1} \approx \tilde{\delta}[n] \quad (6.16)$$

mit

$$\tilde{\delta}[n] = \begin{cases} 1 & \text{für } n \bmod L = 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

**Kreuzkorrelation der MLS mit der periodischen Systemantwort** Wie in Abbildung 6.5 zu erkennen wird das MLS-Signal  $\tilde{x}[n]$  mit der periodischen Systemantwort  $\tilde{y}[n]$  kreuzkorreliert, um die periodische Impulsantwort des Systems zu erlangen. Die ebenfalls normierte, zeitdiskrete Kreuzkorrelationsfunktion lautet

$$\tilde{\Omega}_{xy}[n] = \frac{1}{L+1} \sum_{k=0}^{L-1} \tilde{x}[k] \tilde{y}[k+n]. \quad (6.17)$$

Durch Einsetzen von  $\tilde{y}[n] = \tilde{x}[n] * \tilde{h}[n]$  ergibt sich mit  $\otimes$  als Kreuzkorrelationsoperator

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_{xy}[n] &= \tilde{x}[n] \otimes \tilde{y}[n] = \tilde{x}[n] \otimes \{\tilde{x}[n] * \tilde{h}[n]\} \\ &= \tilde{x}[n] \otimes \tilde{x}[n] * \tilde{h}[n] = \{\tilde{x}[n] \otimes \tilde{x}[n]\} * \tilde{h}[n] \\ &= \tilde{\Omega}_{xx}[n] * \tilde{h}[n]. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Die periodische Kreuzkorrelation zwischen Eingangs- und Ausgangssignal entspricht also einer Faltung der Autokorrelation des MLS-Signals, sowie der periodischen Impulsantwort des zu messenden Raumes.

---

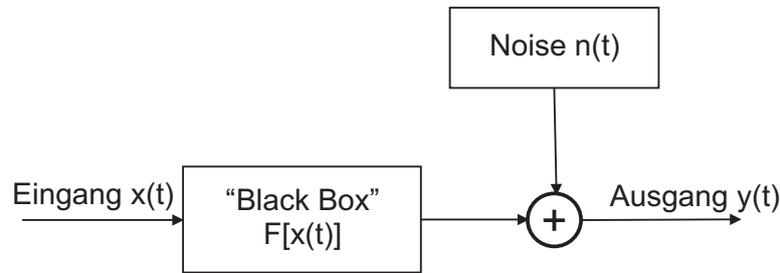


Abb. 6.6.: Ein einfaches Messmodell

Durch Vernachlässigung des Gleichspannungsteils in Gleichung (6.16), der bei höheren Ordnungen des MLS-Signals ohnehin verschwindend klein wird, und einsetzen in Gleichung (6.18) erhält man

$$\tilde{\Omega}_{xy}[n] \approx \tilde{\delta}[n] * \tilde{h}[n] \approx \tilde{h}[n]. \quad (6.19)$$

Man sieht, dass die Kreuzkorrelation einer MLS mit der durch sie hervorgerufenen periodischen Systemantwort die periodische Impulsantwort des Systems ist.

#### 6.1.4. Messung mittels logarithmischem Sinus-Sweep

Die im Jahr 2000 von Angelo Farina in [8] erstmals vorgestellte Messmethode erfüllt alle zu Beginn des Kapitels formulierten Anforderungen an ein Messsystem. Die Methode ist effektiv und dennoch einfach. Die MLS-, sowie die TDS-Methode gehen von der Annahme aus, dass das zu untersuchende System perfekte Linearität und Zeitinvarianz besitzt. Da diese Bedingungen in der Praxis jedoch nicht absolut erfüllbar sind, treten bei beiden Verfahren Messfehler auf. Verwendet man einen logarithmischen Sweep als Anregungssignal, ist es möglich die lineare Impulsantwort sowie die Impulsantworten jeder einzelnen harmonischen Verzerrung zu bestimmen. Diese Meßmethode ist zudem robust gegen geringe Zeitinvarianzen[20].

Ein einfaches Modell einer Messstrecke ist in Abbildung 6.6 zu sehen. Zwischen Eingang  $x(t)$  und Ausgang  $y(t)$  befindet sich die sogenannte "Blackbox", deren Übertragungsverhalten durch die Messung zu bestimmen ist, sowie eine Störquelle  $n(t)$ , die dem gemessenen Signal eine Rauschkomponente hinzufügt.

Das Ausgangssignal kann damit durch die Gleichung

$$y(t) = F[x(t)] + n(t) \quad (6.20)$$

beschrieben werden. Für den Fall eines linearen, zeitinvarianten Übertragungssystems, entspricht die Blackbox der Faltung des Eingangssignals  $x(t)$  mit der Impulsantwort  $h(t)$  des Systems.

$$y(t) = x(t) * h(t) + n(t) \quad (6.21)$$

Bei Messaufgaben im Bereich der Raumakustik kann jedoch nicht von einem linearen und zeitinvarianten Messsystem ausgegangen werden. Der Grund für die Nichtlinearitäten liegt vor allem in den harmonischen Verzerrungen der Lautsprecher, die das Anregungssignal dem Messsystem zuführen. Die Zeitinvarianz der Messstrecke kommt zum einen von der mit zunehmender Messdauer erfolgten Erwärmung der Lautsprecherspule und dem daraus veränderten Übertragungsverhalten des Lautsprechers, zum anderen von den Schwankungen der Lufttemperatur und den damit verbundenen Veränderungen der Schallausbreitungsgeschwindigkeit.

Da es sehr aufwendig ist den Störanteil  $n(t)$  komplett zu eliminieren, bleibt lediglich dessen Reduzierung, um die Qualität der Messung zu erhöhen. Dies ist durch mehrfache Messung von  $y(t)$  und der zeitsynchronen Mittelwertbildung möglich. Der daraus erhaltenen Mittelwert  $\bar{y}(t)$  besitzt um ein um 3dB je Messanzahlverdopplung verbessertes Signal-Rauschverhältnis.

Um die Impulsantwort  $h(t)$  zu bestimmen, ist nun lediglich eine "Entfaltung" des Ausdrucks  $x(t) * h(t)$  notwendig.

Die Entfaltung kann sowohl im Zeitbereich als auch im Frequenzbereich stattfinden. Ersteres ist jedoch nur dann möglich, wenn ein geeignetes inverses Filter  $f(t)$  bekannt ist, das als Faltungsergebnis mit dem Eingangssignal  $x(t)$  einen Diracimpuls  $\delta(t)$  ergibt.

$$x(t) * f(t) = \delta(t) \quad (6.22)$$

Aus der Faltung der gemessenen Systemantwort  $y(t)$  mit  $f(t)$  kann letztendlich die Impulsantwort über

$$h(t) = y(t) * f(t) \quad (6.23)$$

ermittelt werden.

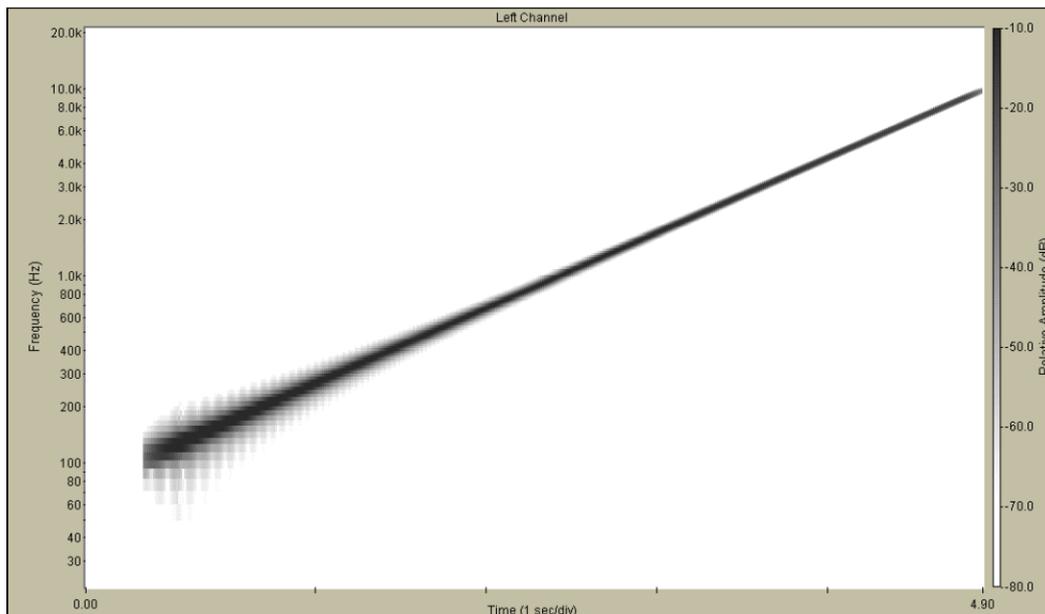
Die Entfaltung im Frequenzbereich erfordert die Division der durch eine FFT erhaltenen Spektren  $X(f)$  und  $\bar{Y}(f)$  und die anschließende Rücktransformation in den Zeitbereich. Um bei der Rücktransformation in den Zeitbereich mittels IFFT zu gewährleisten, dass es sich nicht um eine zirkuläre Entfaltung handelt, müssen  $x(t)$  (Länge  $N$ ) sowie  $\bar{y}(t)$  (Länge  $M$ ) durch anhängen von 0-Werten auf die Länge  $N + M - 1$  gebracht werden. Nach der Rücktransformation liegt die Impulsantwort schließlich im Zeitbereich vor. (siehe Gleichung (6.24)).

$$h(t) = IFFT \left[ \frac{FFT(\bar{y}(t))}{FFT(x(t))} \right] \quad (6.24)$$

Abbildung 6.7 zeigt ein Sonogramm<sup>5</sup> des logarithmischen Sweep. Man beachte die logarithmische Skalierung der Frequenzachse. In Abbildung 6.8 ist die Systemantwort eines leicht nichtlinearen Systems in einem Sonogramm dargestellt. Man kann deutlich die harmonischen Verzerrungsprodukte, die parallel zur linearen Systemantwort verlaufen erkennen. Die Entfaltung mittels des inversen Filters bewirkt eine Drehung des Sonograms

---

<sup>5</sup>Zeit-Frequenz Darstellung



**Abb. 6.7.:** Sonogramm eines logarithmischen Sweeps [8].

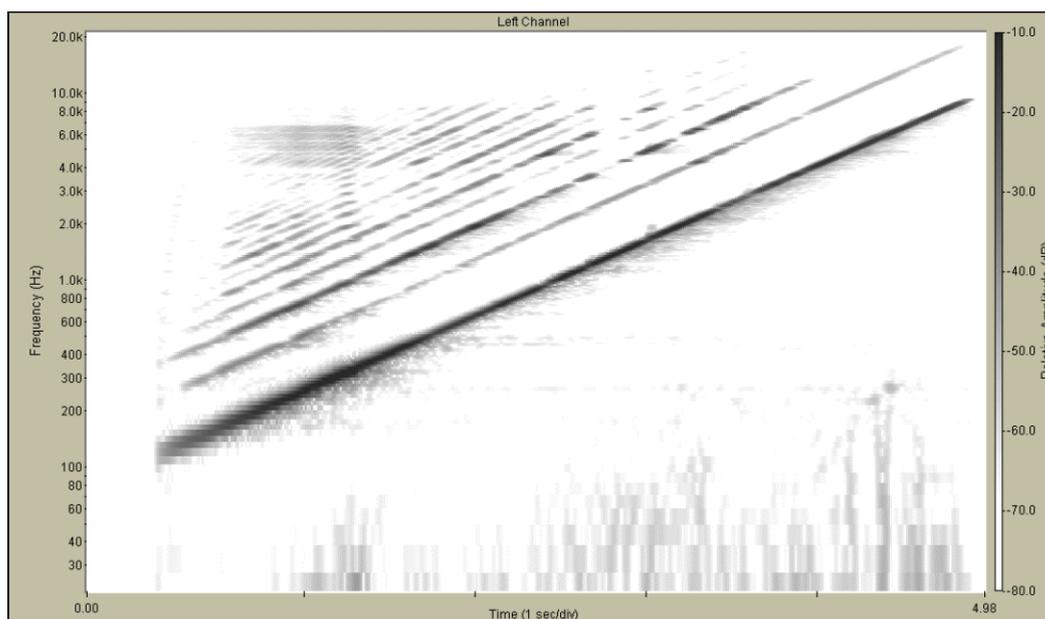
der Systemantwort gegen den Uhrzeigersinn, so dass die lineare Antwort des Systems zu einer senkrechten Linie wird. Die Verzerrungsprodukte werden nach links verschoben und erscheinen als separate Impulsantworten zu exakt berechenbaren vorgelagerten Zeitpunkten [8].

Diese Eigenschaft der Entfaltung wird durch Betrachtung des inversen Filters ( 6.9) plausibel. Sowohl bei der Entfaltung im Zeitbereich, als auch bei der Division der Spektren im Frequenzbereich, ist das inverse Filter nichts anderes als der als Messsignal verwendete, zeitlich umgekehrte logarithmische Sweep. Im Falle eines logarithmischen Sweeps ist das inverse Filter noch mit einer Amplitudenmodulation behaftet, um die dem System bei hohen und tiefen Frequenzen unterschiedliche zugefügte Energie zu kompensieren. Das inverse Filter fügt durch die Faltung mit der Systemantwort eine logarithmisch zur Frequenz proportionale Verzögerung hinzu, so dass im Falle einer korrekten Dimensionierung des Sweeps, die lineare, sowie alle durch Verzerrung entstandenen Impulsantworten, separat und ohne Überlappung vorliegen, und durch Fensterung extrahiert werden können (siehe Abbildung 6.10 und 6.11) [8].

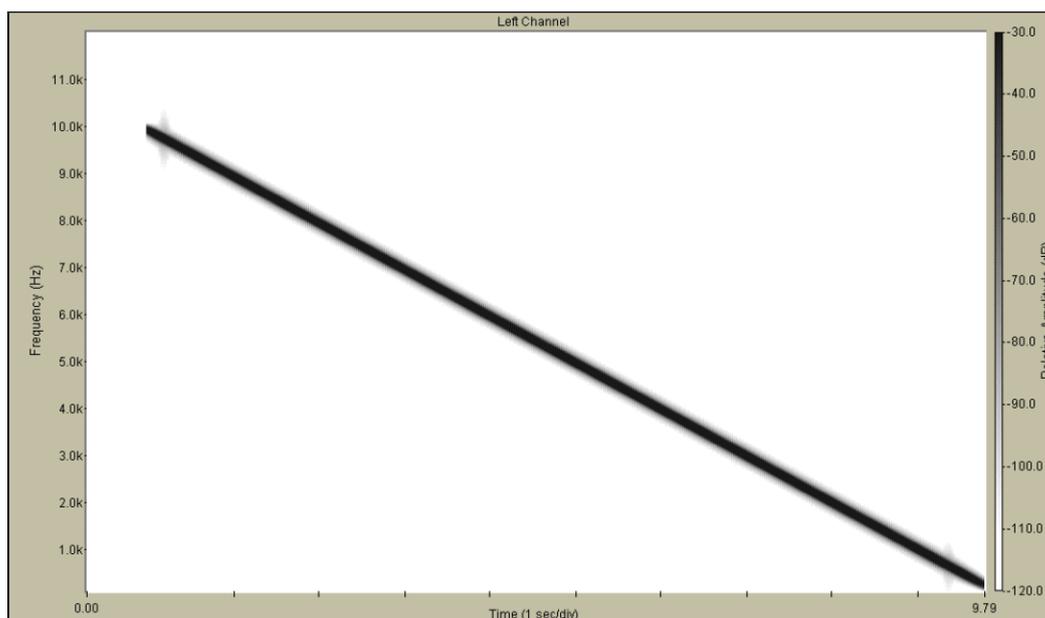
**Erzeugung des logarithmischen Sweeps** Es ist wichtig, dass Sweep-Signal den Messbegebenheiten anzupassen, um korrekte Messergebnisse zu erhalten. Je nach Länge der erwarteten Impulsantwort, gilt es die Parameter des Messsweeps entsprechend anzupassen.

Ein Sinus-Signal hat im allgemeinen die Form

$$x(t) = \sin(f(t)). \quad (6.25)$$



**Abb. 6.8.:** Systemantwort eines leicht nichtlinearen Systems auf die Erregung mittels eines logarithmischen Sweep. Die harmonische Verzerrung ist deutlich anhand des Obertonspektrums zu erkennen [8].



**Abb. 6.9.:** Sonogram des zur Entfaltung verwendeten inversen Filters [8]

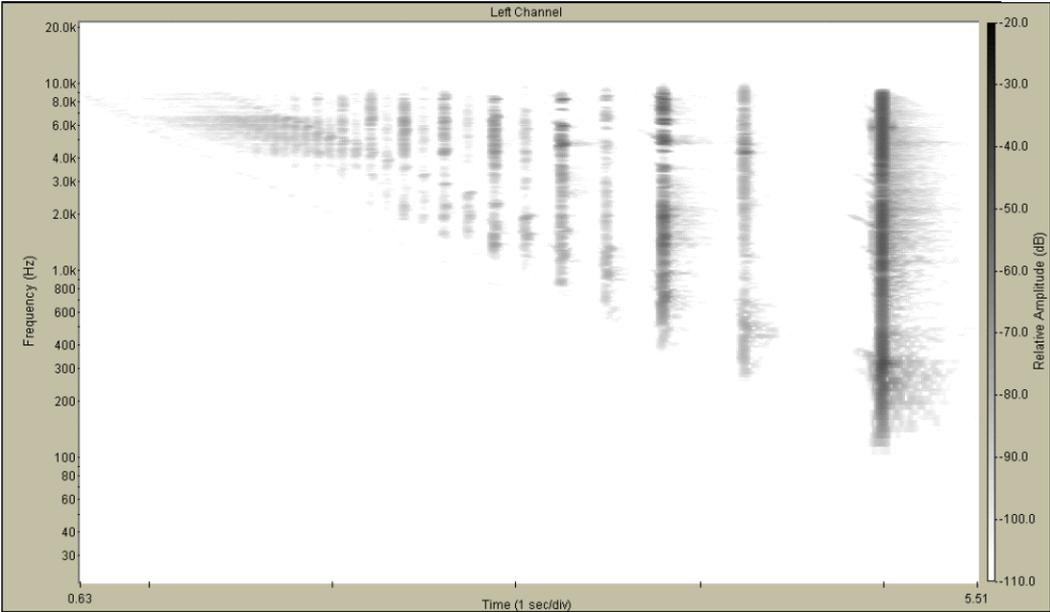


Abb. 6.10.: Sonogram der entfaltenen Systemantwort [8]

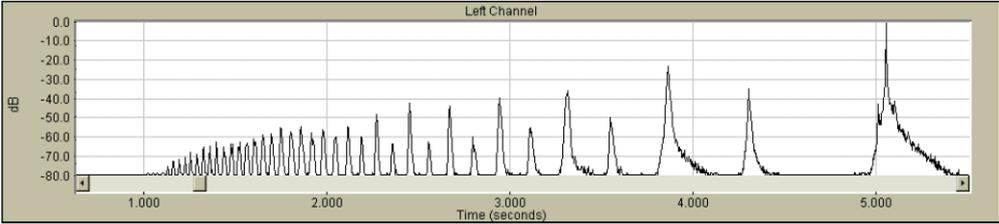


Abb. 6.11.: Entfaltete Systemantwort im Zeitbereich [8]

Aus der Signal-Theorie ist bekannt, dass die Frequenz die zeitliche Ableitung des Argumentes der Sinus-Funktion ist. Eine konstante Frequenz  $\omega$  wäre danach durch  $f(t) = \omega t$  zu erhalten. Ein linearer Sweep, dessen Frequenz beginnend mit  $\omega_1$  in der Zeit  $T$  bis  $\omega_2$  steigt, wäre durch

$$d(f(t)) = \omega_1 + \frac{\omega_2 - \omega_1}{T} t \quad (6.26)$$

zu erhalten, was zu einem Argument von

$$f(t) = \omega_1 t + \frac{\omega_2 - \omega_1}{T} \frac{t^2}{2} \quad (6.27)$$

führt.

Ebenso verhält es sich mit einem logarithmischen Sweep-Signal. Die allgemeine Form eines logarithmischen Sweeps beträgt:

$$x(t) = \sin \left[ K \cdot (e^{\frac{t}{L}} - 1) \right] \quad (6.28)$$

Um die Parameter  $K$  und  $L$  mittels Startfrequenz  $\omega_1$  sowie Endfrequenz  $\omega_2$  und die Sweepdauer  $T$  setzen wir

$$K(e^{\frac{t}{L}} - 1) \frac{d}{dt} = \omega_1 \text{ für } t = 0, \text{ sowie} \quad (6.29)$$

$$K(e^{\frac{t}{L}} - 1) \frac{d}{dt} = \omega_2 \text{ für } t = T. \quad (6.30)$$

Dadurch ergeben sich:

$$K = \frac{T\omega_1}{\ln\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)} \quad (6.31)$$

$$L = \frac{T}{\ln\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)}. \quad (6.32)$$

Die gewünschte Sinus-Funktion für den logarithmischen Sweep ergibt sich durch Einsetzen von  $K$  und  $L$  zu

$$x(t) = \sin \left[ \frac{T\omega_1}{\ln\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)} \left( e^{\frac{t}{T} \ln\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)} - 1 \right) \right] \quad (6.33)$$

Ein weiterer, wichtiger Punkt um das Sweep-Signal richtig zu dimensionieren ist der zeitliche Abstand zwischen den Abbildungen der Verzerrungsprodukte der Ordnung  $N$ , sowie der linearen Impulsantwort. Es muss eine separate Abbildung gewährleistet sein,

da sonst die ineinander gehenden Impulsantworten nicht trennbar wären, und das Messergebnis verfälschen würden. Dafür setzen wir

$$N \frac{d}{dt} \left[ \frac{T\omega_1}{\ln\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)} \left( e^{\frac{t}{T} \ln\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)} - 1 \right) \right] = \frac{d}{dt} \left[ \frac{T\omega_1}{\ln\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)} \left( e^{\frac{t+\Delta t}{T} \ln\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)} - 1 \right) \right] \quad (6.34)$$

und erhalten

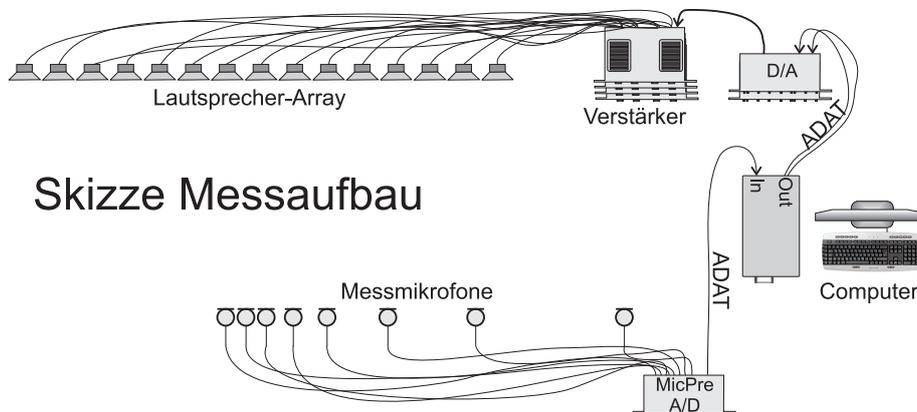
$$\Delta t = T \frac{\ln(N)}{\ln\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)}. \quad (6.35)$$

Damit es zu keiner Überlagerung der linearen Impulsantwort, mit der Impulsantwort der ersten Harmonischen kommt, muss  $T$  so dimensioniert sein, dass  $\Delta t$  mindestens so groß wie die Länge der Impulsantwort ist.

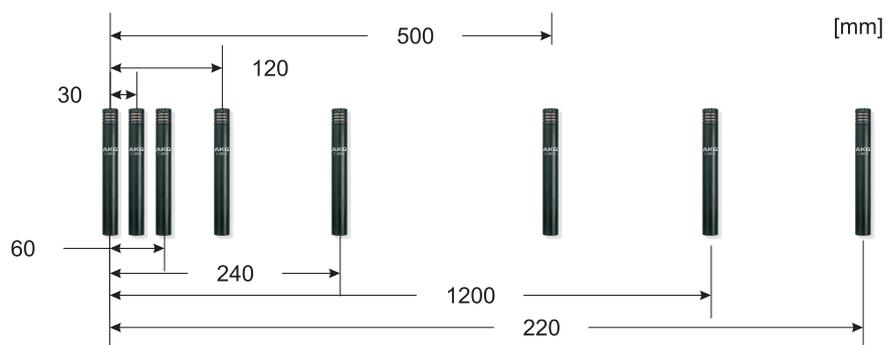
## 6.2. Messaufbau

Um die Leistungsfähigkeit des Zeitumkehrspiegels zu testen wurde eine Reihe von Messungen angefertigt. Dabei wurde die in PD erstellte Implementation des Zeitumkehrspiegels, sowie eine ebenfalls in PD [23] programmierte, auf der Farina-Methode basierende Messapplikation zur Messung von Impulsantworten verwendet.

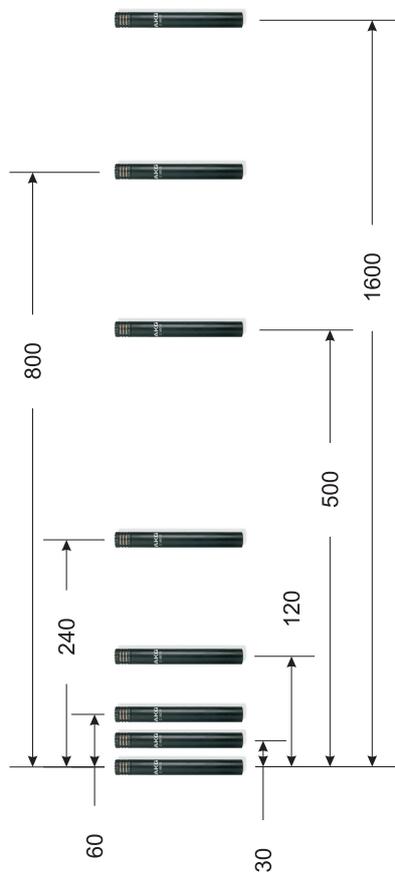
Bei den Messungen wurden nicht nur die 24 Lautsprecher des IEM CUBE herangezogen, sondern ebenfalls 15 weitere Lautsprecher, durch deren tropfenartige Form eine nahezu kugelförmige Abstrahlcharakteristik der Schallwelle gewährleistet wird (vgl. Anhang). Sie wurden für die Realisierung freier Arrayformen verwendet. Als Messaufnehmer wurde ein Mikrofonarray zusammengestellt, das sowohl in der Horizontalen als auch in der Vertikalen das Schalldruckfeld an acht Messpunkten aufnahm.



**Abb. 6.12.:** Messaufbau



**Abb. 6.13.:** Mikrofonarray in horizontaler Richtung bestehend aus 8 AKG C480 mit Kugelcharakteristik (Kapsel: CK 62-ULS)



**Abb. 6.14:** Mikrofonarray in vertikaler Richtung bestehend aus 8 AKG C480 mit Kugelcharakteristik (Kapsel: CK 62-ULS).

Das Schallfeld wurde in horizontaler sowie in vertikaler Richtung mittels Mikrofonarrays vermessen.

Bei den Messungen kamen folgende Geräte zum Einsatz, deren Spezifikationen im Anhang angeführt sind.

Anzahl	Gerät	Typenbezeichnung
8	Mikrofon	AKG C480 mit CK62-Kapsel (omnidirektional)
1	Mikrofonvorverstärker und A/D Wandler	Presonus Digimax LT (8-kanalig)
1	Soundkarte	RME Digi 9652 (ADAT-Interface)
1	D/A Wandler	RME ADI 8-Pro (8 kanalig)
4	Leistungsverstärker	APart PA4060 (4 kanalig)
15	Lautsprecher	speziell angefertigte Tropfenlautsprecher(siehe Anhang A.1)

**Tab. 6.1.:** Aufstellung der zur Messung verwendeten Geräte

### 6.3. Messablauf

Nach dem Aufbau des Lautsprecher- sowie des Mikrofonarrays wurde zunächst die Übertragungsstrecke zwischen dem Messmikrofon 1, das sich später exakt im Fokuspunkt befinden soll, sowie den einzelnen Lautsprechern gemessen. Dabei wurde nacheinander mit jedem einzelnen Lautsprecher ein logarithmischer Sweep wiedergegeben und das Signal mit dem Mikrofon aufgezeichnet. Dieser Vorgang wurde vier Mal wiederholt, und das Mittel genommen um den Signal-Rauschabstand um 6dB zu verbessern. Mittels Entfaltung wurde so die Impulsantwort für die entsprechenden Übertragungsstrecken ermittelt (siehe Kapitel 6.1.4 auf Seite 65). Dabei wurde wie in Kapitel 3.2.2 auf Seite 17 beschrieben die Tatsache ausgenutzt, dass Quelle und Senke vertauscht werden können, ohne dass sich die akustischen Eigenschaften des Ausbreitungspfad ändern.

Die so erlangten Impulsantworten, wurden nun in die Zeitumkehr-Applikation importiert, dort zurecht geschnitten und zeitlich umgedreht. Als nächstes wurde ein logarithmisches Sweepsignal mit den umgekehrten Impulsantworten gefaltet und über die entsprechenden Lautsprecher erneut wiedergegeben. Die mittels des kompletten Mikrofonarray sowie den A/D-Wandlern am Computer aufgezeichneten Signale wurden wiederum entsprechend entfaltet, so dass letztendlich die Impulsantworten eines fokussierten Impulses entlang der horizontalen sowie der vertikalen Messachse vorlagen. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass die Messungen in horizontaler und vertikaler Richtung aufgrund eines Mangels an gleichen, zur Messung geeigneten Mikrofonen nacheinander stattfand. Da die Fokussion mittels Zeitumkehr empfindlich gegenüber Veränderungen der Temperatur ist (siehe Kapitel 3.3.5 auf Seite 26), wurde stets mittels eines Präzisionsthermometers die Temperatur überwacht und konstant gehalten.

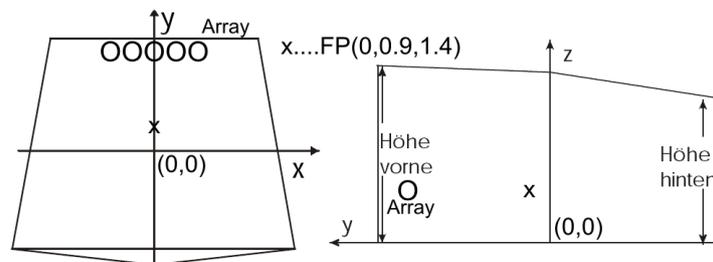
## 7. Ergebnisse aus Simulation und Messung

Um weitere Schlüsse über den Zeitumkehrspiegel zu erlangen, werden mit der in Kapitel 5 beschriebenen Simulation, sowie dem unter 6.2 beschriebenen Messaufbau die Ergebnisse miteinander verglichen und gegenübergestellt. Da die Versuche an dem realen Zeitumkehrsystem sehr aufwendig sind (Organisation, Materialbeschaffung, Aufbau etc.), wird oftmals auf die in MATLAB programmierte Simulation zurückgegriffen. Bei den Ergebnissen aus Simulation und den realen Messungen müssen aufgrund der ungleichen Bedingungen selbstverständlich auch quantitative Unterschiede auftreten. Daher scheint es gewagt, aus der Simulation exakte quantitative Prognosen für eine reale Installation abzugeben. Die Simulation aufgrund dieser Unterschiede jedoch als minderwertig zu betrachten, ist nicht gerechtfertigt. So ist es sehr wohl möglich, eine qualitative Beurteilung des Verhaltens des Zeitumkehrspiegels zu treffen, und diese auch auf reale Installationen anzuwenden.

Die Auswertung geschieht im wesentlichen anhand der im Kapitel 3.3 eingeführten Parameter, um etwaige Vergleiche mit in der Literatur vorkommenden Ergebnissen zu ermöglichen. So beruhen die Auswertungen fast ausschließlich auf den *Point Spread Functions*, die wie auf Seite 19 als Maxima der lokalen Impulsantworten entlang einer Achse definiert sind. Dies orientiert sich an der Auswertung der realen Messungen, die nur in Form von Impulsantworten vorliegen. Im Nahbereich um den Fokuspunkt stimmen die Werte der PSF sehr gut mit der vorherrschenden Schalldrucksituation überein - weiter entfernt, kommt es zu Abweichungen. Aus diesem Grund ist oftmals ein zweiter Graph verzeichnet, der die exakte Schalldruckverteilung zum Fokuszeitpunkt angibt. Die Ergebnisse der Messungen werden als Kurvenzug dargestellt, der aus den Verbindungslinien der 8 Messpunkte besteht, die als kleine Kreuze eingezeichnet sind. Klarerweise ist es unmöglich mit 8 Messmikrofonen eine ebenso gute spatiale Abtastung des Schallfeldes zu erlangen, wie das bei der Simulation der Fall ist, so dass Details in den Messungen des real installierten Zeitumkehrspiegels nicht immer sichtbar sind.

## 7.1. Vergleich verschiedener Arrayformen

Bevor nun der Aufbau der verschiedenen vermessenen und simulierten Arrayformen, sowie die daraus resultierenden Ergebnisse präsentiert werden, wird nochmal ein Überblick über die Achsenbezeichnung und deren Ursprung anhand Abbildung 7.1 vorangestellt. In der Simulation, sowie in der Messung, wurde der Fokuspunkt stets an die Koordinate  $(0,0.9,1.4\text{m})$  gelegt, die ebenfalls mit einem Kreuz skizziert ist. Im folgenden Abschnitt wird die Position der Lautsprecher relativ zum Fokuspunkt angegeben. Die absolute Lage im Raum ergibt sich also erst durch den Vergleich mit der Position des Fokuspunkt im Raum.



**Abb. 7.1.:** Skizze der Achsen im IEM-CUBE, sowie Skizze der Lage des Fokuspunkt(x).

### 7.1.1. Beschreibung der getesteten Array-Geometrien

#### Array 1 - Linienarray

Das Array 1 stellt ein Linienarray dar. Dabei befinden sich die Lautsprecher<sup>1</sup> entlang einer Linie parallel zur x-Achse. Die Höhe des Arrays stimmt mit der Höhe des Fokuspunktes von  $1.40\text{m}$  überein (siehe Abbildung 7.2).

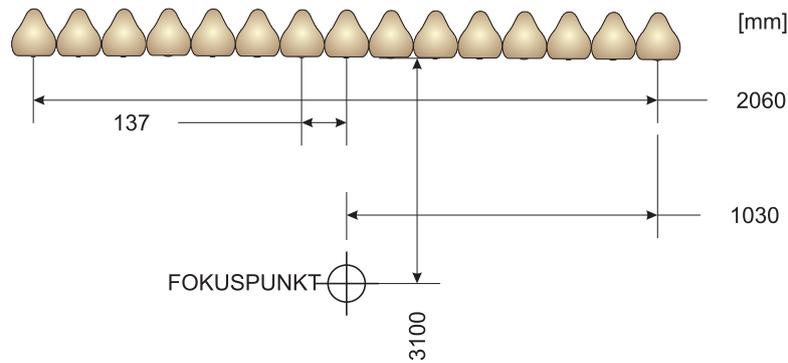
Die Vermessung erfolgte bei einer Raumtemperatur von  $24.4^\circ\text{C}$ . Daraus resultiert eine Schallgeschwindigkeit von  $346.04\frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

#### Array 2 - 5x3 planares Array

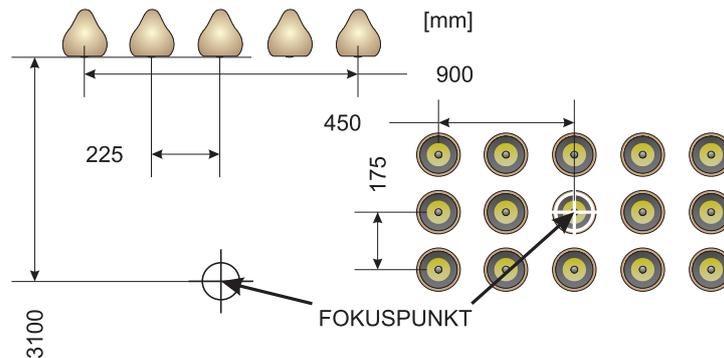
Array 2 ist eine planare Anordnung von 15 Lautsprechern, die in drei Reihen zu je 5 Lautsprechern übereinander stehen. Die mittlere Reihe befindet sich auf Höhe des Fokuspunktes - dessen Projektion sich direkt im Mittelpunkt des Arrays (siehe Abbildung 7.3) befindet.

Die Vermessung des planaren Arrays wurde bei einer Raumtemperatur von  $23.8^\circ\text{C}$  durchgeführt (resultierende Schallgeschwindigkeit:  $345.68\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ).

<sup>1</sup>Verwendung fanden spezielle Tropfenlautsprecher (siehe Anhang A.1)



**Abb. 7.2.:** Array1 - Linienarray: 15 Tropfenlautsprecher (siehe Anhang A.1) auf einer Linie entlang der x-Achse.



**Abb. 7.3.:** Array2 - 5x3 planares Array: 3 Reihen zu je 5 Lautsprechern übereinander

### Array 3 - chaotisches Array: Beliebige Verteilung von 15 Lautsprechern im ganzen Raum.

Array 3 stellt eine chaotische Verteilung der 15 Lautsprecher im gesamten Raum dar. Diese befinden sich zwar alle in Höhe des Fokuspunktes (1.40m), es wird jedoch keine Rücksicht auf deren Ausrichtung gelegt.

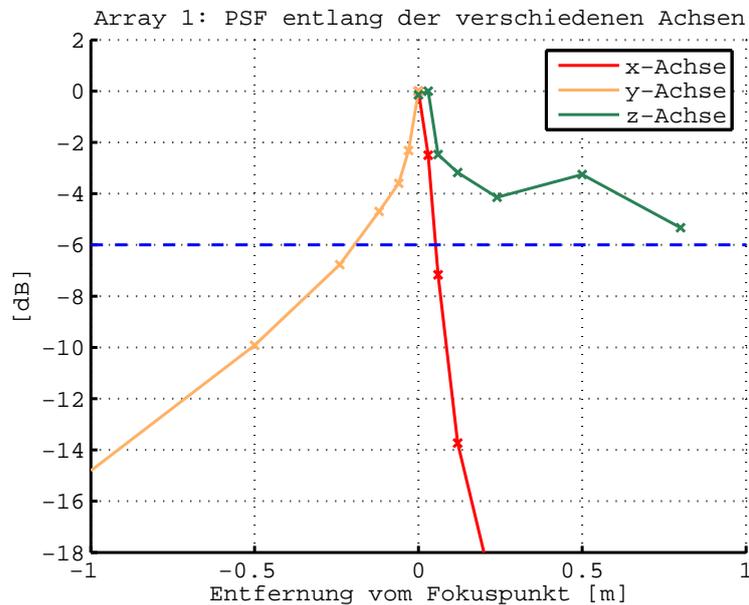
Die Vermessung erfolgte bei einer Raumtemperatur von  $24.0^{\circ}\text{C}$ . Daraus resultiert eine Schallgeschwindigkeit von  $345.8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .



**Abb. 7.4.:** Array3 - chaotisches Array: Beliebige Verteilung von 15 Lautsprechern. Der Fokuspunkt befindet sich an der Position des am weitesten links stehenden Mikrophones - genauer an dessen Membran.

### 7.1.2. Ergebnisse aus Messungen an realer Installation

Abbildung 7.5 zeigt die PSF des Array1, dem Linienarray, entlang der drei Raumkoordinaten. Aufgrund der großen Apertur in x-Richtung, ist hier die Fokussionsschärfe mit Abstand am Besten. Deutlich zu erkennen ist ebenfalls, dass die Fokussion in y-Richtung, die der Ausbreitungsrichtung der von den Lautsprechern erzeugten Welle entspricht, schlechter ist, als dies in x-Richtung der Fall ist. Dies ist auch auf den Mangel an zuträglichen Seitenreflektionen zurückzuführen. Eine schlechte Fokussion in z-Richtung war ebenfalls zu erwarten, da sich alle Lautsprecher auf der gleichen Höhe befinden<sup>2</sup>.



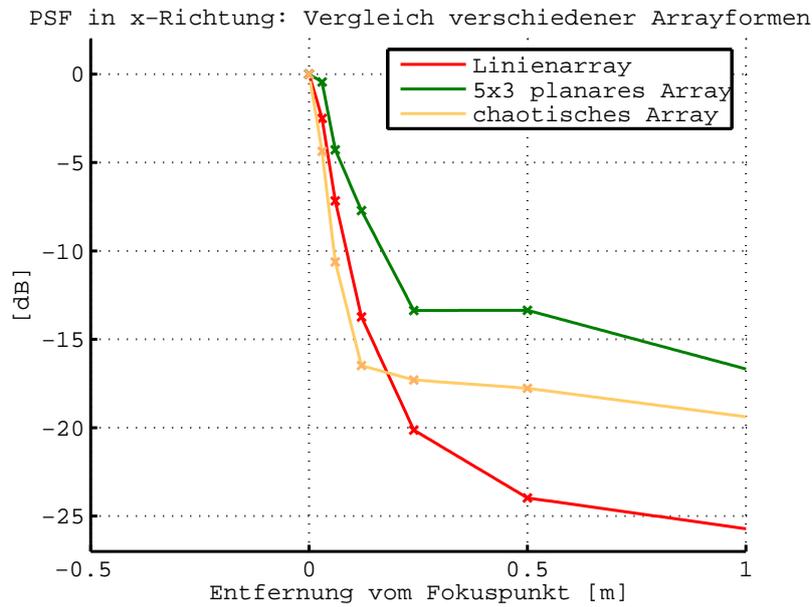
**Abb. 7.5:** Vergleich der gemessenen PSF von Array1 entlang der Raumachsen

In den folgenden Diagrammen werden die PSF der 3 vermessenen Lautsprecher Arrays in Richtung der x- und z-Richtung dargestellt. Dabei ist eindeutig erkennbar, dass sich deutliche Unterschiede aufgrund der unterschiedlichen Array-Geometrien ergeben. Es ist also nicht nur die Gesamtanzahl der Lautsprecher, sondern vielmehr auch deren Verteilung von Wichtigkeit.

Somit ist es nicht verwunderlich, das Array 1 mit 15 Lautsprechern entlang der x-Achse die beste Fokussion aufweist. Das chaotische Array hat die größte Fokussionsschärfe. Dies ist mit der großen "Apertur" zu erklären, die die Verteilung der Lautsprecher im gesamten Raum mit sich bringt. Das planare Array hat aufgrund seiner Geometrie bei Betrachtung der Fokussion in x-Richtung die schlechtesten Werte was die Fokussion anbelangt.

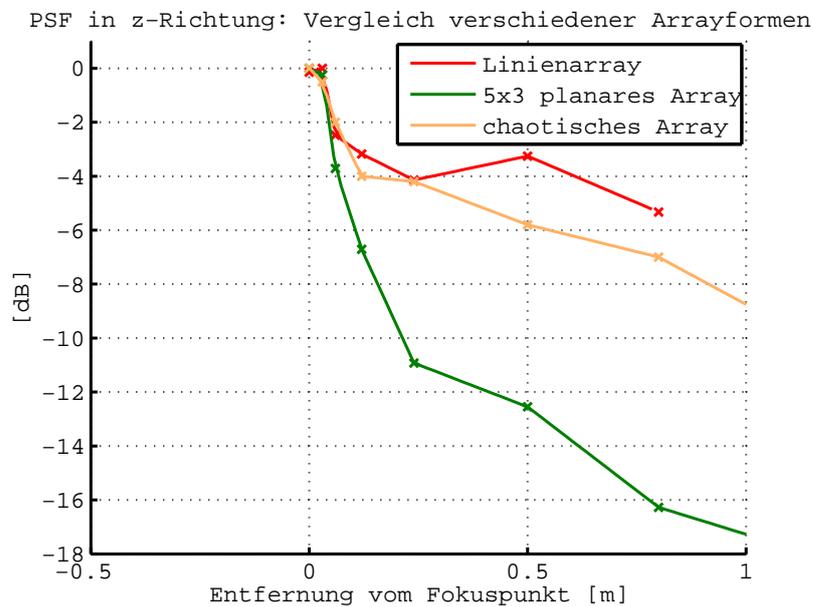
Betrachtet man die Situation in z-Richtung, so ergibt sich natürlich ein anderes Bild. Hier zeigt das Array 2 die besten Fokussionseigenschaften. Dies ist ebenfalls kein Wunder, da sowohl die Anzahl der Lautsprecher als auch die Apertur in z-Richtung dem

<sup>2</sup>Das dies nicht unbedingt ein Nachteil ist, zeigt das Beispiel einer Klanginstallation, bei der der Hörer unabhängig seiner Körpergröße an „Klangsäulen“ beschallt werden könnte.



**Abb. 7.6:** Vergleich der gemessenen PSF in x-Richtung verschiedener Arrayformen

Linienarray und dem chaotischen Array überlegen sind. Das Linienarray und das chaotische Array haben einen geschätzten Sidelobelevel von 4-5dB was der Theorie entsprechen würde.



**Abb. 7.7:** Vergleich der gemessenen PSF in z-Richtung verschiedener Arrayformen

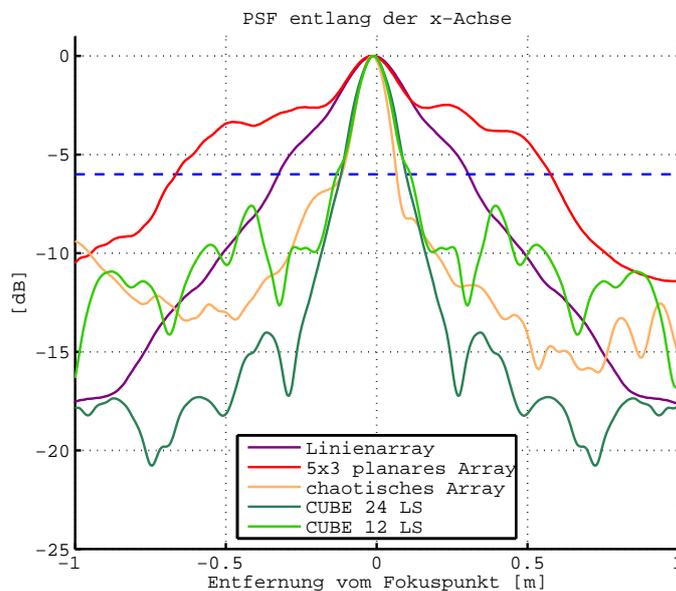
### 7.1.3. Ergebnisse aus der Simulation

Die folgenden Diagramme zeigen ebenfalls die PSF verschiedener Arrays. Zu den drei im vorherigen Abschnitt diskutierten Arrays zeigen zwei weitere Graphen die simulierte PSF des IEM-CUBE, der sowohl für den Vollbetrieb mit 24 Lautsprechern, als auch für den Betrieb mit den unteren 12 Lautsprechern simuliert wurde. Was die Lautsprecheranordnung betrifft, sei hier auf Kapitel 5.1 auf Seite 42 verwiesen.

Abbildung 7.8 bestätigt die Vorteile weitreichender Arrayanordnungen gegenüber einer kompakten Lautsprecherverteilung. Das chaotische Array, sowie beide den Raum umschließende Lautsprecheranordnungen des CUBES, zeigen deutliche Vorteile sowohl was die Fokussionsschärfe, als auch den Sidelobe Level angeht.

Deutlich wird auch der Einfluss der Bandbreite auf die Fokussion. So ist der Unterschied zwischen den gemessenen und den aus der Simulation hervorgehenden, hier dargestellten PSF, auf die Reduktion der Bandbreite zurückführbar, die eine Aufweitung der Hauptkeule zur Folge hat.

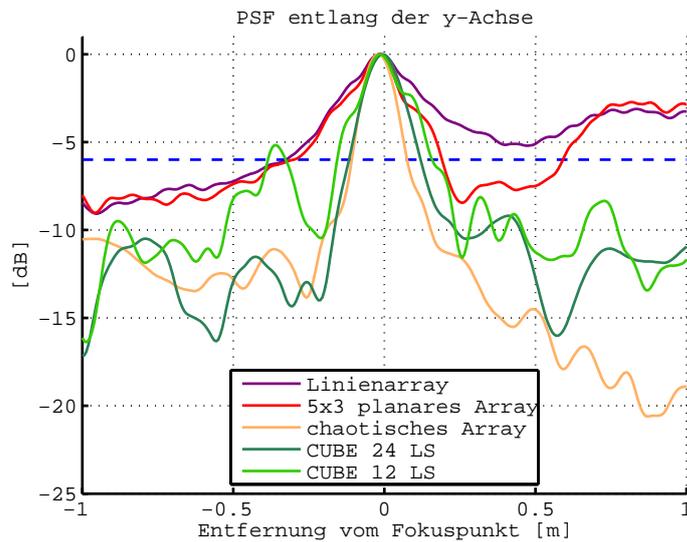
Die Symmetrie der PSF (Ausnahme: chaotisches Array) ergibt sich aufgrund der symmetrischen Lage des Fokuspunktes auf der Mittelachse des IEM CUBE.



**Abb. 7.8:** PSF simulierter Arrayanordnungen in x-Richtung

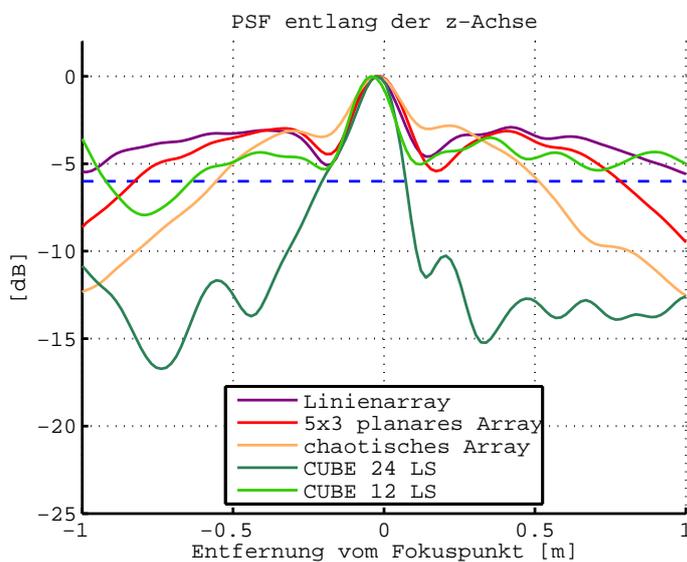
Aus der dezentrale Lage des Fokuspunktes in y-Richtung resultiert die Asymmetrie der PSF in Abbildung 7.9. Vor allem beim Liniensarray und dem planaren Array ist eindeutig die Schalldruck-Zunahme in Richtung der Lautsprecher zu erkennen. Bei den „verteilten“ Arrayanordnungen, ist zwar ebenfalls ein asymmetrisches Verhalten erkennbar, jedoch bei weitem nicht in diesem Ausmaß.

Abbildung 7.10 zeigt letztlich die PSF in z-Richtung. Wie zu erwarten war, profitiert die Fokussion in z-Richtung im CUBE sehr deutlich von der Hinzunahme der „Hemi-



**Abb. 7.9:** PSF simulierter Arrayanordnungen in y-Richtung

sphäre“<sup>3</sup>. Desweiteren ist eine scharfe Fokussierung mit zunehmender Höhe (zunehmende z-Werte) erkennbar, wobei sich aufgrund der Annäherung in Richtung Quelle wie auch bei dem Linien-, sowie dem planaren Array eine Zunahme des Sidelobelevels (PSF) ergeben.



**Abb. 7.10:** PSF simulierter Arrayanordnungen in z-Richtung

<sup>3</sup>Bezeichnung für die Lautsprecher in zweiter und dritter Ebene, die mit den ursprünglichen 12 Lautsprechern der ersten Ebene eine Halbkugel bilden.

## 7.2. Einfluss der Raumverhältnisse und Effekt der Superresolution

In Abbildung 7.11 werden Schalldruck und PSF in x-Richtung unter dem Einfluss verschiedener Wandabsorptionsgrade des CUBES abgetragen. Dabei wurden in der Simulation die Wände einmal als ideal reflektierend, einmal ideal absorbierend und schließlich mit dem durch reale Impulsantworten berechneten mittleren Absorptionsgrad versehen. Dabei wird deutlich, dass die Bedämpfung des CUBES nur geringfügig schlechtere Fokussioneigenschaften nach sich zieht, als es unter ideal reflektierenden Bedingungen der Fall wäre. Es gilt jedoch zu bemerken, dass die Simulation nur mit zeitlich reduzierten Impulsantworten, und Spiegelquellen bis zur 2. Ordnung arbeitet. Die in dem in der Simulation verwendeten Frequenzbereich (400-1600Hz) auftretenden Absorptionskoeffizienten liegen im Bereich von 0.22 und 0.3 und stellen damit bei Spiegelquellen bis zur zweiten Ordnung ebenfalls nur marginale Abschwächungen dar.

Deutlich macht sich jedoch das Fehlen jeglicher Schallreflektionen bemerkbar.

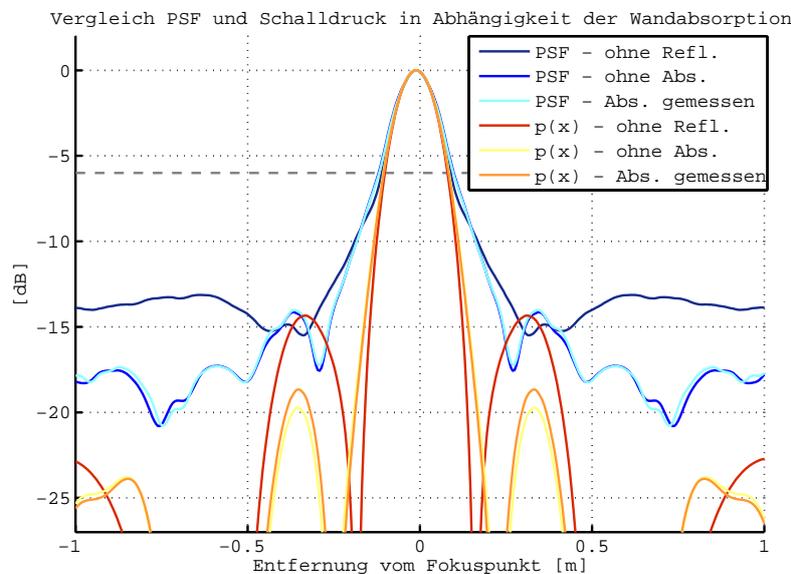
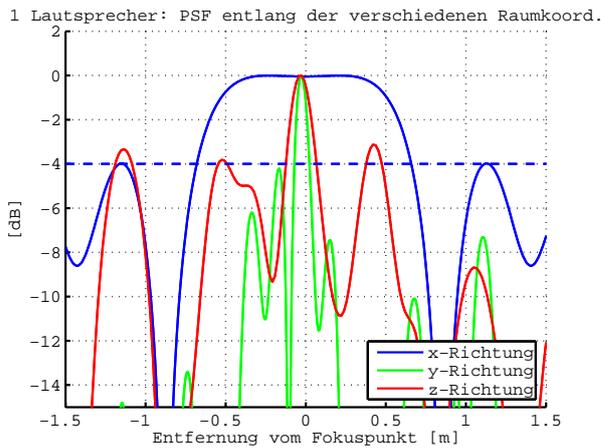


Abb. 7.11.: PSF und Schalldruckverteilung in Abhängigkeit der Raumverhältnisse.

Um den in Abschnitt 3.2.1 beschriebenen Effekt der *super-resolution* nachzuvollziehen, wird in MATLAB das Schallfeld eines Zeitumkehrversuches für nur eine vorhandene Schallquelle simuliert. Gemäß [30] sollte der *sidelobelevel* wie in Abschnitt in diesem Fall -4dB betragen.

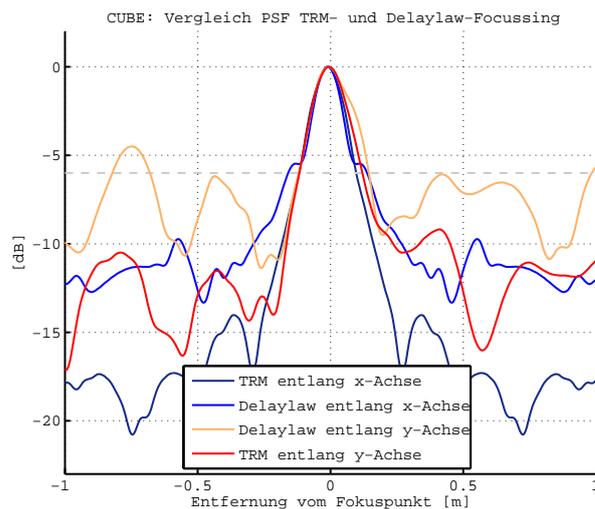
Abbildung 7.12 stellt die *Point Spread Functions* entlang der drei Raumachsen durch den Fokuspunkt dar und bestätigt, dass selbst mit nur einem Lautsprecher durch Ausnutzung der Wandreflektionen die Fokussion von Schallenergie möglich ist.



**Abb. 7.12:** Zeitumkehr-Simulation mit einem Lautsprecher: Der *sidelobelevel* von -4dB zeigt das Phänomen der *superresolution*

Die auffällige Breite der Hauptkeule in x-Richtung liegt in der speziellen geometrischen Anordnung dieses Experimentes begründet. Da sich die Schallquelle mit dem Fokuspunkt genau auf der Mittelachse befindet, ist der Beitrag der seitlichen Reflexionen erster Ordnung aufgrund der großen Distanz zum Fokuspunkt sehr gering. Der Beitrag der rückwärtigen Reflexionen unterstützt diese Ausprägung weiter.

Auch in Abbildung 7.13 wird der positive Einfluss von Wandreflektionen erkennbar. In der Gegenüberstellung eines mittels Zeitumkehr und eines mittels *delay-law* fokussierten Impulses wird einmal mehr die Überlegenheit des Zeitumkehrspiegels deutlich. Durch den Einfluss der Wandreflektionen sind die Nebenkeulen deutlich weniger ausgeprägt und eine Verbesserung des SL von ca. 5-8dB erkennbar.

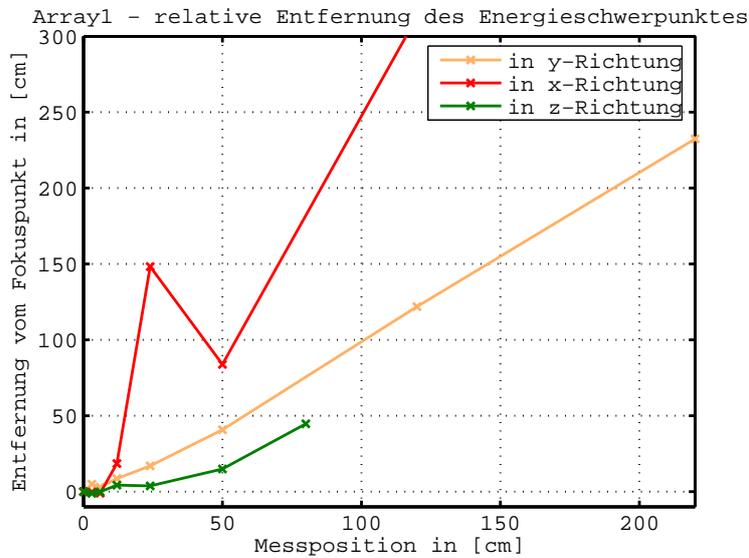


**Abb. 7.13:** Gegenüberstellung der Fokussierung mittels *delaylaw* und Zeitumkehrspiegel (TRM) durch Vergleich von im CUBE simulierten PSFs in x- und y-Richtung.

### 7.3. Ausbreitung der virtuellen Punktquelle

Im Folgenden wird untersucht, inwieweit sich nach der Fokussion tatsächlich das Schallfeld einer virtuellen Punktquelle im Raum ausbreitet. Dafür wurde die zeitliche Lage des Energieschwerpunktes der gemessenen Impulsantworten untersucht und über die Ausbreitungsgeschwindigkeit auf die tatsächlich vom Fokuspunkt aus zurückgelegte Wegstrecke geschlossen. So müsste der Energieschwerpunkt einer im Abstand  $a$  zum Fokuspunkt gemessene Impulsantwort um  $\Delta t = \frac{c}{a}$  verzögert liegen, als das bei der im Fokuspunkt gemessene Impulsantwort der Fall ist.

Abbildung 7.14 zeigt die oben beschriebene Analyse entlang der drei Raumkoordinaten. Mittels dieser Grafik wird deutlich, dass die Schallausbreitung vom Fokuspunkt weg, nur auf der Achse Lautsprecher-Fokuspunkt verläuft (in diesem Fall die y-Achse). Eine tatsächlich kugelförmige Ausbreitung ist also nur möglich, wenn der Fokuspunkt von Lautsprechern umschlossen wird. Selbst dann ist es fraglich, ob die durch Fokussion erzeugte virtuelle Punktquelle von dem durch die kohärente Überlagerung am Fokuspunkt entstandenen überhöhten Energieniveau ausläuft.



**Abb. 7.14:** Verfolgung der nach der Fokussion sich ausbreitenden Schallwelle.

## 8. Fazit & Ausblick

Aus den Simulationsergebnissen sowie den Messungen an einer realen Zeitumkehr-Applikation wird klar - die Fokussion von Schallenergie mit Hilfe des Zeitumkehrspiegels ist möglich.

Das dies teilweise sehr gut funktioniert, kann messtechnisch, sowie auch perzeptiv vollzogen werden. Bei geeigneter Anordnung und Verwendung von 24 Lautsprechern im IEM-CUBE, konnten Überhöhungen des örtlichen Schalldrucks im Fokuspunkt von über 15dB erreicht werden.

Ebenfalls deutlich wird die Wichtigkeit von Anordnung und Ausrichtung des Zeitumkehrspiegels, um eine den Wünschen entsprechende Fokussion zu erzielen. Es wird ebenfalls gezeigt, dass es sinnvoll ist, sich vor der Installation eines Zeitumkehrspiegels Gedanken über die vorherrschende Raumgeometrie zu machen, um eine möglichst große Unterstützung des Raumes zur Fokussion zu erlangen.

Um Schallsignale an räumlich beschränkten Arealen innerhalb eines Raumes abzubilden, stellt der Zeitumkehrspiegel eine einfache, aber effektive Lösung dar.

Dennoch gibt es einige Problematiken, die einer Verbesserung bedürfen. Einige Lösungsansätze auf dem Weg zu einer neuen Form der Schallfeldsynthese werden im Folgenden genannt.

So haben Versuche, die das Klangsignal verfälschenden Vorechos zu eliminieren leider zu keinem Ergebnis geführt, und fanden somit auch keine Berücksichtigung in dieser Arbeit. Ebenfalls nicht vollständig beantwortet ist die Frage nach der Schallausbreitung einer virtuell am Fokuspunkt platzierten Punktquelle.

Aufgrund der Verluste, die in Form von Absorption bei der Ausbreitung in einem Raum auftreten, ist es (wie in Kapitel 3.2.2 gezeigt wurde) notwendig, diese zu kompensieren. Die in dieser Diplomarbeit vorgestellte Methode der Kompensation durch die Multiplikation der Ausgangssignalspektren mit dem Kehrwert des entsprechenden quadratischen Betragsspektrums, bedarf einer Regularisierung. Eine elegantere Methode der Zeitumkehr in verlustbehafteten Systemen wird in [31] vorgestellt. Dabei findet ein *spatio-temporaler inverser Filter* Verwendung, bei dessen Berechnung die Regularisierung durch *singular value decomposition* erfolgt, wodurch ein geringerer Regularisierungsfehler entsteht.

Die mit steigender Frequenz zunehmende Bündelung von Schallsignalen, lässt vor allem für hohe Frequenzen eine künstliche Aufweitung des Fokuspunktes sinnvoll er-

scheinen. Strategien hierfür könnten eine frequenzabhängige Anzahl der zur Fokussion verwendeten Lautsprecher oder die Verwendung eines räumlichen Filters sein.

---

## 9. Literaturverzeichnis

- [1] A.V.Oppenheim und R.W.Schafer. *Zeitdiskrete Signalverarbeitung*. R. Oldenbourg Verlag, München Wien, 3 edition, 1999.
- [2] Marinus M. Boone. Acoustic rendering with wave field synthesis. Technical report, Lab. of Acoustical Imaging and Sound Control, May 2001.
- [3] Michael Dickreiter. *Handbuch der Tonstudioteknik*, volume 1. K. G. Sauer, München, 6 edition, 1997.
- [4] C. Draeger. *Ondes élastiques et réversibilité*. PhD thesis, University of Paris 11, 1997.
- [5] C. Draeger and M. Fink. One channel time-reversal of elastic waves in a chaotic 2d-silicon cavity. *Physical Review Letters*, 79 (3):407–410, 1997.
- [6] E.Hecht. *Optics*. Addison Wesley, Reading, 1987.
- [7] Gunnar Eisenberg. Virtuelle Akustik - Effiziente Faltungsalgorithmen für die Implementierung des Spiegelquellenmodellls. Master's thesis, Technische Universität Berlin, 2002.
- [8] Angelo Farina. Simultaneous measurement of impulse response and distortion with swept-sine technique. Technical report, Dipartimento di Ingegneria Industriale, Università di Parma, 2000.
- [9] Mathias Fink. Time reversal of ultrasonic fields - part I: Basic principles. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency*, 39:555 – 666, September 1992.
- [10] William G. Gardner. Efficient convolution without input-output delay. *J. Audio Eng. Soc.*, 43 No. 3:127–136, March 1995.
- [11] Joachim Gnauk. Untersuchung zur Inversion von Luftschall. Master's thesis, Universität Oldenburg, Februar 1997.
- [12] O. Hadar and G.D. Boreman. Oversampling requirements for pixelated-imager systems. *Optical Engineering*, 38(5):782–785, Mai 1999.
- [13] Honina. Wikipedia - <http://de.wikipedia.org/wiki/Polarkoordinaten>, 2004 Juni.

- 
- [14] Jason R. Vande Kieft. Computational improvements to linear convolution with multirate filtering methods. Master's thesis, University of Miami, April 1998.
- [15] Philipp M. Krejci. Entwicklung eines Mehrkanaligen Systems für eine virtuelle Raumakustik. Master's thesis, Institut für Elektronische Musik und Akustik - Universität für Musik und darstellende Kunst Graz, 2001.
- [16] Heinrich Kuttruff. *Akustik: Eine Einführung*. Hirzel, Stuttgart [u.a.], 12 edition, 2004.
- [17] Lothar Cremer und Helmut A. Müller. *Die wissenschaftlichen Grundlagen der Raumakustik*, volume 2. Hirzel, Stuttgart, 2 edition, 1976.
- [18] Ludwig Bergmann und Clemens Schaefer. *Lehrbuch der Experimentalphysik*, volume 1 Mechanik, Akustik, Wärme of 10. de Gruyter, 1990.
- [19] E. Meyer and E.-G. Neumann. *Physikalische und Technische Akustik*. Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 3 edition, 1979.
- [20] Swen Müller and Paulo Massarani. Transfer-function measurement with sweeps. *AES*, 49(6):443ff, June 2001.
- [21] A. Pommert, M. Bomans, and K. H. Höhne. Volume visualization in magnetic resonance angiography. *IEEE Computer Graphics Applications*, 12(5):12–13, September 1992.
- [22] P.Roux and M.Fink. Time reversal in a waveguide: Study of the temporal and spatial focussing. *Journal of the Acoustical Society of America*, 107:2418–2429, 2000.
- [23] Miller Puckette et al. Pure Data: Ein Open-Source Echtzeitentwicklungssystem für Audio, Video und Grafikverarbeitung.
- [24] Guillemette Ribay, Cedric Roux, Julien De Rosny, and Mathias Fink. Time reversal imaging of noise sources inside a reverberant room. *CFA/DAGA*, pages 35–36, March 2004.
- [25] Robert Höldrich und Alois Sontacchi. Wellenfeldsynthese - Erweiterungen und Alternativen. *Fortschritte der Akustik - Tagungsband der DAGA*, 2005.
- [26] J. De Rosny. *Milieux réverbérants et réversibilité*. PhD thesis, University of Paris 6, 2000.
- [27] M. R. Schröder. New method of measuring reverberation time. *Journal Acoustical Society of America*, 37:409–412, 1965.
- [28] E. Verheijen. *Sound Reproduction by Wave Field Synthesis*. PhD thesis, University of Technology Delft, 1998.
-

- 
- [29] Stefan Warum. Messung von Außenohrübertragungsfunktionen und direktionalen Raumimpulsantworten als Basis der Auralisation realer Räume. Master's thesis, Institut für elektronische Musik und Akustik - Universität für Musik und darstellende Kunst in Graz, Oktober 2003.
- [30] Sylvain Yon, Mickael Tanter, and Mathias Fink. Sound focussing in rooms I: The time-reversal approach. *Acoustical Society of America*, 113(3):1533–1543, March 2003.
- [31] Sylvain Yon, Mickael Tanter, and Mathias Fink. Sound focussing in rooms II: The spatio-temporal inverse filter. *Acoustical Society of America*, 114(6):3044 – 3052, December 2003.
-

# A. Anhang

## A.1. Gerätespezifikationen

### AKG C480 mit CK-62

---

C 480 B-ULS	Frequenzgang:	10-30.000 Hz
	Vorabschwächung:	+6, 0, -10 dB, schaltbar
	Bassabschwächungsfilter:	12 dB/Oktave bei 70 Hz und 150 Hz
	Elektrische Impedanz:	<150 Ohm
	Empfohlene Lastimpedanz:	>2.000 Ohm/1.000 pF
	Speisespannung:	48 V Phantomspeisung nach DIN 4559

---

CK 62-ULS	Richtcharakteristik:	Kugel
	Übertragungsbereich:	20-20.000 Hz
	Leerlauf-Übertragungsfaktor:	40/20/6,3 mV/Pa (-28/-34/-44 dBV)
	Grenzschalldruckpegel:	134/140/144 dB (k=0,5%)
	Äquivalentschalldruckpegel (CCIR 468-3):	23/21/28 dB
	Äquivalentschalldruckpegel:	13/11/17 dB-A
	Signal/Rauschabstand (A-Bew.):	81/83/77 dB
	Vorabschwächung:	+6/0/-10 dB, schaltbar

---

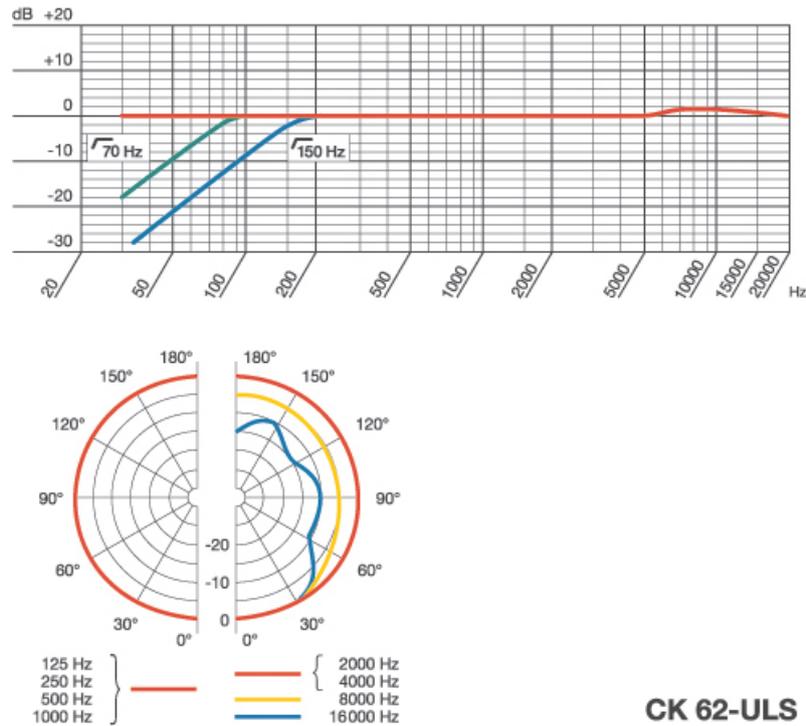


Abb. A.1.: Frequenzgang und Richtcharakteristik der Mikrofonkapsel AKG CK 62-ULS

## Presonus Digimax LT

Number of Channels	8
Input Impedance, XLR Input:	1.3k
Input Impedance, Line Level Input:	10k
Gain:	0dB to +40dB
Pad:	-20 dB
Phantom Power:	+48 V
Output:	Adat Lightpipe Digital Optical (24-bit)
Sampling Rates:	32kHz, 44.1kHz, 48kHz
Headroom:	+22dB
Frequency Response:	20Hz-50kHz
THD + Noise (Unweighted):	<0.009%
Noise Floor:	-94dBu
Signal to Noise:	>98dB
Analog Dynamic Range:	>120dB
Power Supply Rejection:	>98dB

## RME Digi 9652

---

Unterstützte Samplefrequenzen:	32 kHz, 44,1 kHz, 48 kHz, 88,2 kHz, 96 kHz
Clock Modi:	Slave und Master
Puffergrößen/Latenzzeiten:	1,5 ms, 3 ms, 6 ms, 12 ms, 23 ms, 46 ms, 93 ms, 186 ms
Eingang:	3 x optisch (TOSLINK), 1 x coaxial (Cinch), Intern (CD-ROM/Sync-In), Wordclock (BNC)
Format Eingang:	SPDIF, AES/EBU (Consumer, Professional), ADAT® optical
Ausgang:	3 x optisch (TOSLINK), coaxial (Cinch), Intern (Sync-Out), Wordclock (BNC)
Format Ausgang:	SPDIF, AES/EBU (Consumer/Professional), ADAT® optical

---

## RME ADI 8-Pro

---

Eingang AD:	6,3 mm Stereoklinke und 25 pol. Sub-D, servosym. komplett sym., DC-gekoppelter Signalpfad
Ausgang AD:	ADAT optical, TDIF-1 (je 24 Bit), Wordclock
Eingang DA:	ADAT optical, TDIF-1 (je 24 Bit), Wordclock
Ausgang DA:	6,3 mm Stereoklinke und 25 pol. Sub-D , servosym., DC-gekoppelter Signalpfad

---

Dynamik AD:	116 dBA
THD AD:	< -110 dB (< 0,00032%)
THD+N AD:	< -102 dB (< 0,0008 %)
Überprehdämpfung AD:	> 130 dB

---

Dynamik DA:	112 dBA un-muted
THD DA:	< -104 dB (< 0,00063 %)
THD+N DA:	< -102 dB (< 0,0008 %)
übersprehdämpfung DA:	> 110 dB

---

Ein-/Ausgangsspegel bei 0 dBFS @ Hi Gain:	+19 dBu
Ein-/Ausgangsspegel bei 0 dBFS @ +4 dBu:	+13 dBu
Ein-/Ausgangsspegel bei 0 dBFS @ -10 dBV:	+2 dBV
Frequenzgang AD/DA, -0,1 dB:	5 Hz - 21,5 kHz

---

## APart PA4060

---

Input	RCA Cinch unbalanced 1V / 10kOhm
Output (RMS Program)	8Ohm: 4 x 50 watt / 70 watt max 4Ohm: 4 x 60 watt / 90 watt max
Limiter	Dynamic-slow @ -3dB, defeatable
Frequency Response	15 Hz - 30 kHz
Distortion	< 0.03%

---

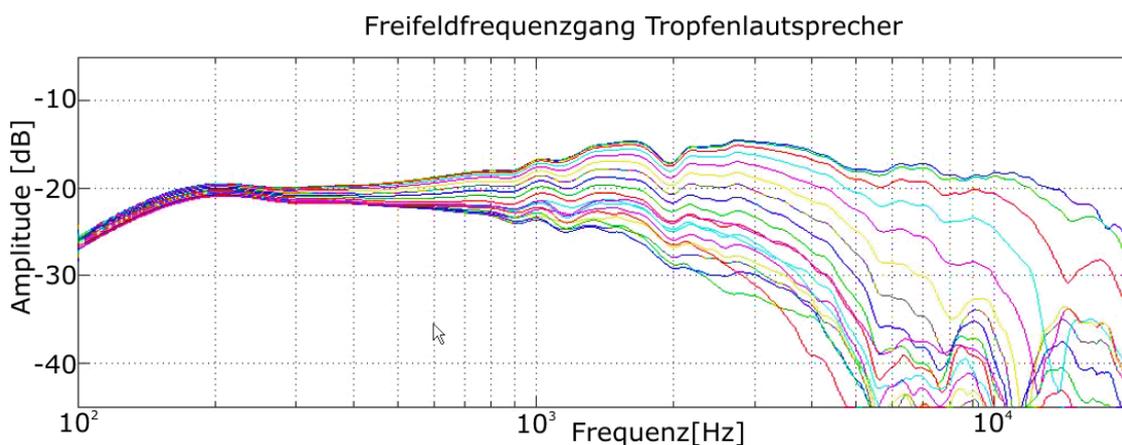
## Der Tropfenlautsprecher

Um möglichst viele Raumreflexionen und damit den Effekt der *superresolution* nutzbar zu machen, hat man sich für die Verwendung des Tropfenlautsprechers entschieden (siehe Abbildung A.2), der aufgrund

seiner Form dem Abstrahlverhalten eines Kugelstrahlers am nächsten kommt. Am parallelen Verlauf der Kurvenschar bis 300Hz erkennt man jedoch, dass die gewünschte Kugelcharakteristik nur für tiefe Frequenzen erreicht wird (siehe Abbildung A.3).



**Abb. A.2:** Der für das Lautsprecher-Array verwendete Tropfenlautsprecher [29]



**Abb. A.3.:** Richtungsabhängiger Frequenzgang des Tropfenlautsprechers - man erkennt deutlich, dass die gewünschte kugelförmige Abstrahlung nur für Frequenzen kleiner 300Hz gilt. [29]